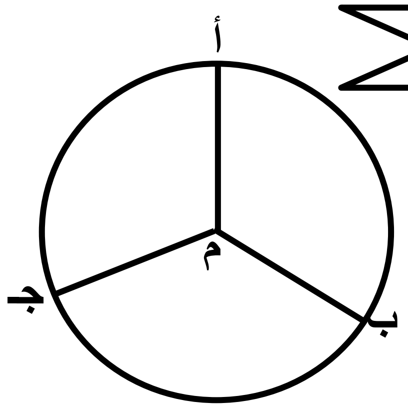
بسم الله الرحمن الرحيم

الهندسة المستوية

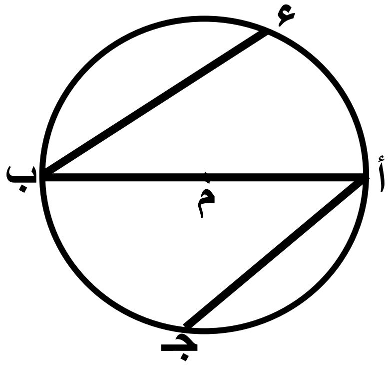
الدائـــــــرة



تعريف الدائرة :-

هى مجموعة نقط المستوى التى تبعد بعد ثابتا عن نقطة ثابتة فى المستوى
تسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة ويسمى البعد الثابت نصف قطر الدائرة

نصف قطر الدائرة :-
أى قطعة مستقيمة تصل بين المركز وأى نقطة على الدائرة مثل م أ ، م ب ، م جـ وكلها متساوية وتساوى نق

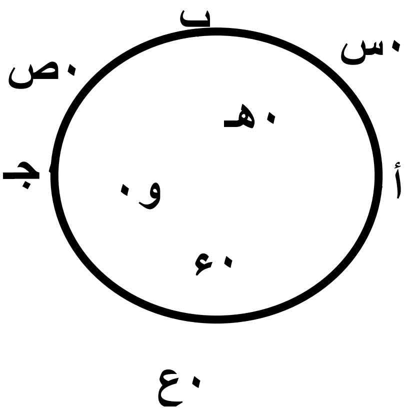


وتر الدائرة :- هى أى قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين على الدائرة مثل ب ء ، أ ب ، أ جـ

قطر الدائرة :- وتر يمر بالمركز

أو أى قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين على الدائرة وتمر بالمركز مثل أ ب

تجزئة المستوى :-



تجزئ الدائرة المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقط

(١) نقط خارج الدائرة : مثل س ، ص ، ع

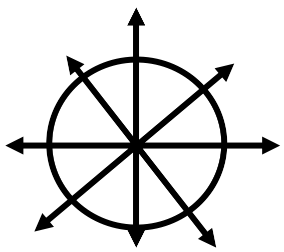
(٢) نقط على الدائرة : مثل أ ، ب ، جـ

(٣) نقط داخل الدائرة: مثل ء ، هـ ، و

لاحظ أن

- **مركز الدائرة ينتمى الى مجموعة نقط داخل الدائرة**
- **مجموعة نقط داخل الدائرة تسمى الدائرة**
- **مجموعة نقط داخل الدائرة ∪ مجموعة نقط داخل الدائرة يسمى سطح الدائرة**

التماثل فى الدائرة :-



أى مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تماثل لها ولهذا فإن للدائرة عدد لا نهائى من محاور التماثل

لاثبات أن أ ، ب ، جـ تقع على محيط دائرة واحدة مركزها م نثبت أن

م أ = م ب = م جـ = نق

محيط الدائرة = ٢ ط نق ،،،،،، مساحة الدائرة = ط ق^{٢} ،،،،، طول قطر الدائرة = ٢نق

مثال إثبت أن النقط أ=(٠ ، ١) ، ب=(١ ، ٢) ، جـ =(-٢ ، ٥) تقع على محيط دائرة واحدة مركزها م=(-١ ، ٣) ثم أوجد مساحتها

الحـــــــــل

م أ = $\sqrt{(٠+١)^{٢} + (٣ - ١)^{٢}} = \sqrt{١ + ٤} = \sqrt{٥}$

م ب = $\sqrt{(١+١)^{٢} + (٣ - ٢)^{٢}} = \sqrt{٤+١} = \sqrt{٥}$

م جـ = $\sqrt{(-١+٢)^{٢} + (٥-٣)^{٢}} = \sqrt{١+٤} = \sqrt{٥}$

طول نصف قطر الدائرة = $\sqrt{٥}$

مساحة الدائرة = ط نق^{٢} = ط × ٥ = ٥ط

****

مثال إذا كانت النقط أ = (-٢ ، ١) تقع على محيط الدائرة التى مركزها (٢ ، ٤) أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة ثم بين ما إذا كانت النقطة ب (١ ، ٣) تقع على هذه أم لا

الحـــــــــل

$\because$ أ تقع على محيط الدائرة م

نق = م أ = $\sqrt{(٢+٢)^{٢} + (٤ - ١)^{٢}} = \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طولية

لمعرفة موقع النقطة ب بالنسبة للدائرة نوجد ب م

ب م = $\sqrt{(١+٢)^{٢} + (٣ - ١)^{٢}} = \sqrt{٩ + ٤} = \sqrt{١٣} \neq$ نق

$\therefore$ ب لا تقع على محيط الدائرة

****

مثال إذا كان أ ب قطر فى دائرة مركزها م حيث أ = (-٥ ، -٣) ، ب = (١ ، ٥) أوجد

(أولا) مركز الدائرة (ثانيا) طول نصف قطر هذه الدائرة (ثالثا) محيط الدائرة

الحـــــــــل

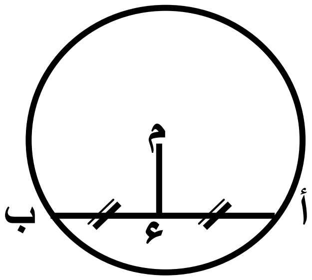
م = منتصف أ ب = $\left(\frac{-٥+١}{٢} ، \frac{-٣+٥}{٢}\right) = \left(\frac{-٤}{٢} ، \frac{٢}{٢}\right)$ = (-٢ ، ١)

نق = م أ = $\sqrt{(-٢+٥)^{٢} + (١+٣)^{٢}} = \sqrt{٩+١٦} = \sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طولية

محيط الدائرة = ٢ ط نق = ٢ ط × ٥ = ١٠ ط

نتائج هامة على الدائـرة

نتيجة(١)



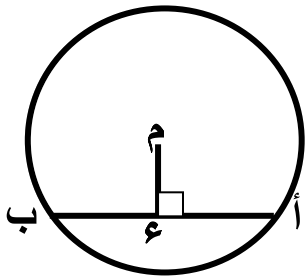
المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها

يكون عموديا على هذا الوتر

فمثلا إذا كانت ء منتصف أ ب فإن م ء ⊥ أ ب

****

نتيجة(٢)



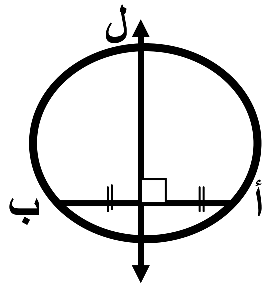
المستقيم المار بمركز الدائرة عمودياً على أى وتر فيها

ينصف هذا الوتر

فمثلا إذا كان م ء ⊥ أ ب فإن ء منتصف أ ب

****

نتيجة(٣)



المستقيم المرسوم عموديا على الوتر من منتصفه

يكون ماراً بالمركز

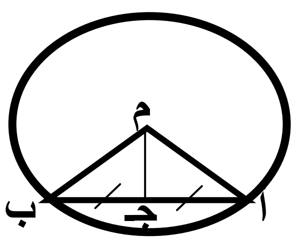
فمثلا إذا كان ل عمودى على أ ب من منتصفه فإن م ∈ ل

مثال

فى الشكل المقابل

إذا كان جـ منتصف أ ب ، ق(أ م̂ جـ)= ٥٠°

أوجد ق (م ب̂ جـ)



الحـــــــل

∵ جـ منتصف أ ب

∴ م جـ ⊥ أ ب

فى Δ م أ ب

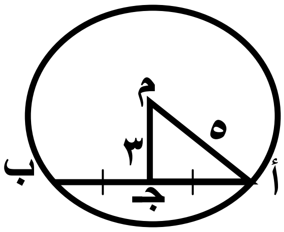
∵ م أ = م ب

∴ ق(م جـ أ) = ٩٠° ق(م ب جـ) = ق (م أ جـ) = ٤٠°

ق(م أ جـ) = ٩٠ ـ ٥٠ = ٤٠°

مثال

فى الشكل المقابل



إذا كانت جـ منتصف أ ب ، م جـ = ٣سم

، نق = ٥سم أوجد طول أ ب

الحـــــــــل

جـ منتصف أ ب ق(م جـ أ) = ٩٠°

(أ جـ)^{٢} = (أ م)^{٢} - (م جـ)^{٢}=(٥)^{٢} – (٣)^{٢}

= ٢٥ ـ ٩ = ١٦

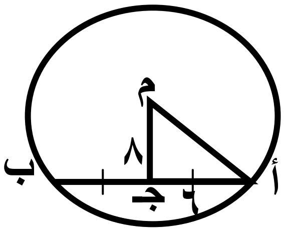
أ جـ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ سم

أ ب = ٢ أ جـ = ٢ × ٤ = ٨سم

****

مثال

فى الشكل المقابل



إذا كانت جـ منتصف أ ب ، أ ب = ١٢سم

، م جـ = ٨سم أوجد طول نصف قطر الدائرة

الحـــــــــل

جـ منتصف أ ب ق(م جـ أ) = ٩٠°

(أم)^{٢} = (أ جـ)^{٢} +(م جـ)^{٢}=(٦)^{٢} + (٨)^{٢}

= ٣٦+٦٤ = ١٠٠

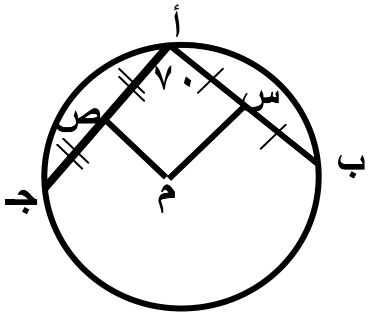
أم = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ سم

نق = أ م = ١٠ سم

****

مثال

فى الشكل المقابل



س ، ص منتصفا أ ب ، أ جـ ، ق(أ) = ٧٠°

أوجد ق (س م ص) ، ق (س م ص) المنعكسة

الحـــــــــل

∵ س منتصف أ ب م س ⊥ أ ب

∴ ق (م س أ) = ٩٠°

∵

ق (س م ص) = ٣٦٠° ـ ٢٥٠° = ١١٠

ق(س م ص)$_{\text{المنعكسة}}$ = ٣٦٠° – ق(س م ص)

ص منتصف أ جـ   م ص ⊥ أ جـ

∴ ق(م ص أ) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الشكل الرباعى = ٣٦٠°

ق(س م ص) = ٣٦٠° – [٩٠° + ٩٠° + ٧٠°]

= ٣٦٠° – ١١٠°

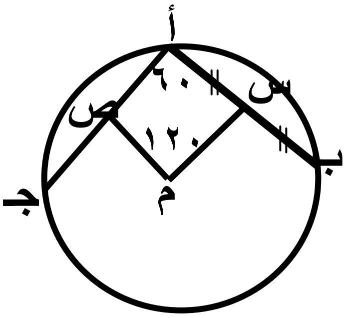
= ٢٥٠°

مثال فى الشكل المقابل

س منتصف أ ب ، ق(س أ ص) = ٦٠°

ق(س م ص) = ١٢٠ إثبت أن

ص منتصف أ جـ



الحـــــــــل

س منتصف أ ب   ∴ق(م س ص) = ٩٠°

مجموع قياسات الشكل الرباعى = ٣٦٠°

ق(م ص أ) = ٣٦٠° – [٦٠° + ١٢٠° + ٩٠°]

ق(م ص أ) = ٣٦٠ - ٢٧٠ = ٩٠°

م ص ⊥ أ جـ

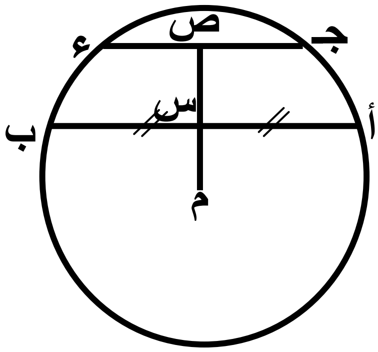
ص منتصف أ جـ

****

مثال فى الشكل المقابل

س منتصف أ ب ، أ ب // جـ ء

إثبت أن ص منتصف جـ ء



الحـــــــــل

س منتصف أ ب   ∴ م س ⊥ أ ب

أ ب // جـ ء ، م س ⊥ أ ب

∴ م ص ⊥ جـ ء

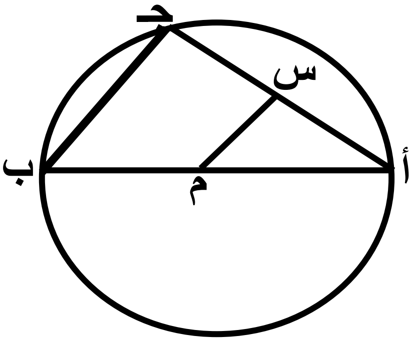
∴ ص منتصف جـ ء

****

مثال فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م ، م س ⊥ أ جـ

ب جـ = ١٠ سم أوجد طول س م



الحـــــــــل

م س ⊥ أ جـ ∴ س منتصف أ جـ

أ ب قطر فى الدائرة م ∴ م منتصف أ ب

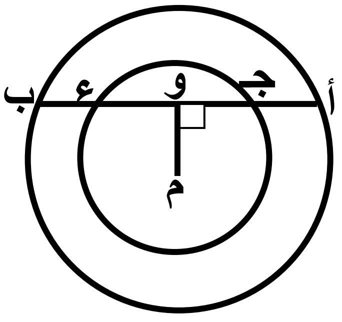
س منتصف أ جـ ، م منتصف أ ب

∴ م س = $\frac{1}{2}$ ب جـ = ٥سم

طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى ضلعين فى مثلث تساوى نصف طول الضلع الثالث

مثال

فى الشكل المقابل
دائرتان متحدتا المركز م ، أ ب وتر فى الدائرة الكبرى يقطع الدائرة الصغرى فى جـ ، ء ، م و ⊥ جـ ء إثبت أن أ جـ = ب ء



الحـــــــل

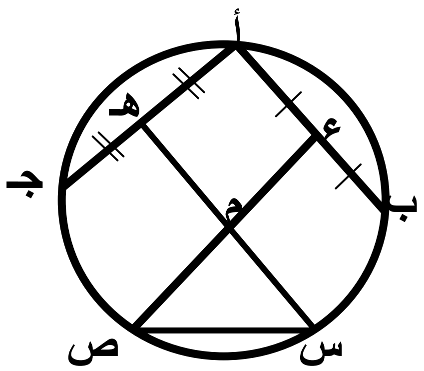
فى الدائرة الصغرى
م و ⊥ جـ ء جـ و = و ء (١)
فى الدائرة الكبرى
م و ⊥ أ ب أ و = و ب (٢)

بطرح ١ من ٢
أ و – جـ و = و ب – و ء
أ جـ = ب ء

****

مثال

فى الشكل المقابل
أ ب ، أ جـ وتران فى الدائرة م
ء ، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ ، ق(أ) = ١٢٠ْ
إثبت أن △ م ص س متساوى الاضلاع



الحـــــــل

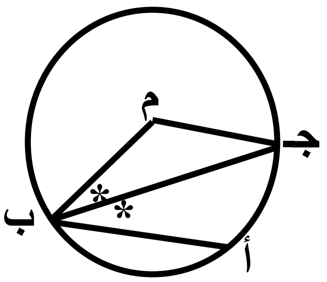
ء منتصف أ ب ∴ ق(م ء أ) = ٩٠ْ
هـ منتصف أ جـ ∴ ق (م هـ أ) = ٩٠ْ
مجموع قياسات الشكل الرباعى = ٣٦٠ْ
ق(ء م هـ) = ٣٦٠ – [٩٠+٩٠+١٢٠]=٦٠

ق(س م ص) = ق(ء م هـ) = ٦٠
للتقابل بالراس
م س = م ص (أنصاف أقطار)
∴ ق(س) = ق(ص) = $\frac{١٢٠}{٢}$ = ٦٠ْ
∴ ق(س) = ق(ص) = ق(س م ص)=٦٠ْ
∴ م س ص متساوى الاضلاع

****

مثال

فى الشكل المقابل
أ ب وتر فى الدائرة م ، ب جـ ينصف (أ ب م)
إثبت أن م جـ // أ ب



الحـــــــل

ب جـ ينصف (أ ب م)

∴ ق(م ب جـ) = ق (أ ب جـ) (١)

م جـ = م ب (أنصاف أقطار)

∴ ق(م جـ ب) = ق (م ب جـ) (٢)

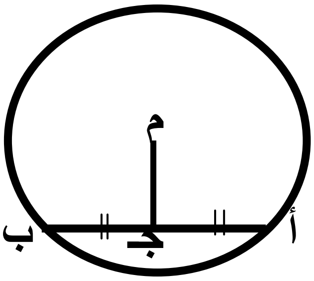
من ١ ، ٢ ينتج أن

ق(م جـ ب) = ق (أ ب جـ) [وهما متبادلتان]

∴ جـ م // أ ب

تمـــــــــــارين(١)

(١) فى الشكل المقابل



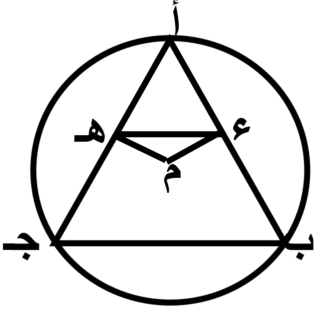
م دائرة طول نصف قطرها ١٠سم ، أ ب وتر فيها

طوله ١٢سم ، جـ منتصف أ ب أوجد

(أولا) طول م جـ (ثانيا) مساحة △ م أ ب

****

(٢) فى الشكل المقابل



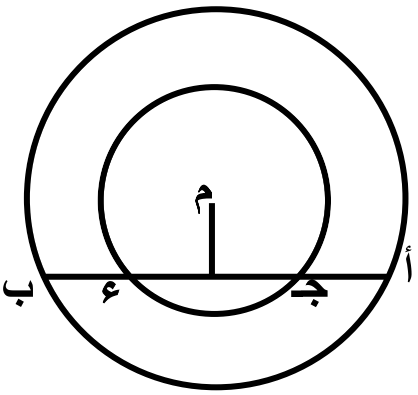
م ع ⊥ أ ب ، م هـ ⊥ أ جـ

إثبت أن ع هـ // ب جـ

وإذا كان ع هـ = ٥سم أوجد طول ب جـ

****

(٣) فى الشكل المقابل



دائرتان متحدتا المركز م ، أ ب وتر فى الدائرة

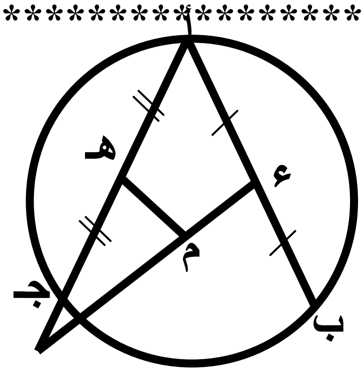
الكبرى يقطع الدائرة الصغرى فى جـ ، ع فإذا

كان أ ب = ٢٠سم ، جـ ع = ١٢سم أوجد

طول أ جـ

****

(٤) فى الشكل المقابل



أ ب ، أ جـ وترين فى دائرة م ، ق (ب أ جـ) = ٤٥ ْ

ع ، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ على الترتيب

رسم ء م فقطع أ جـ فى و إثبت أن م هـ = هـ و

و

****

(٥) أ ب ، جـ ء وتران متوازيان فى الدائرة م التى طول نصف قطرها ١٠سم فإذا كان أ ب = ١٦سم ، جـ ء = ١٢سم أوجد البعد بين أ ب ، جـ ء إذا كان أ ب ، جـ ء

(أولا) فى جهة واحدة من م (ثانيا) فى جهتين مختلفتين من م

(٦) أ ب وتر فى الدائرة م ، ب جـ قطر فيها ، ء منتصف أ ب إثبت أن م ء // أ جـ ثم أحسب ق(أ)

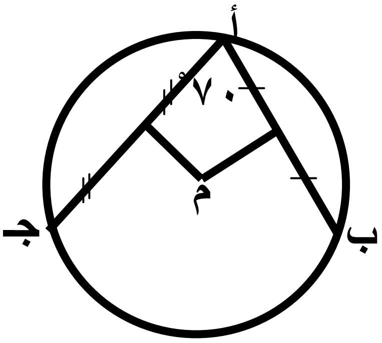
****

(٧) فى الشكل المقابل

س منتصف أ ب ، ص منتصف أ جـ

ق(ب أ جـ) = ٧٠ ْ

أوجد ق (س م ص)



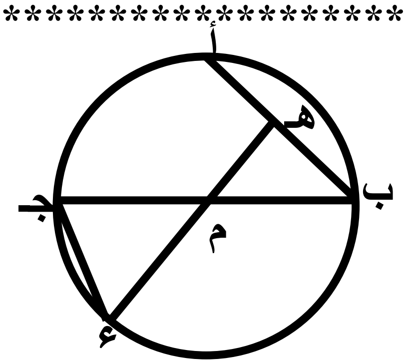
****

(٨) فى الشكل المقابل

هـ منتصف أ ب ، ب جـ = ٨سم

م هـ = ٢سم

أوجد طول ء جـ

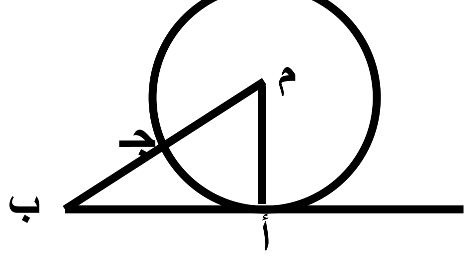


****

(٩) فى الشكل المقابل

أ ب مماس للدائرة م ، جـ منتصف م ب

أوجد ق (أ م ب)



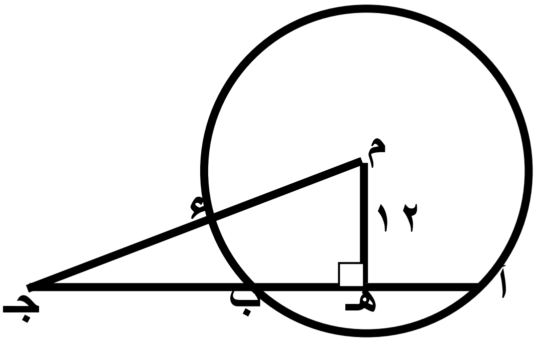
****

(١٠) أ ب قطر فى دائرة مركزها م ، أ جـ وتر فيها حيث ق (ب أ جـ) = ٣٠ ْ وصل ب جـ ورسم م ء ⊥ أ جـ يقطعه فى ء إثبت أن

(أ) م ء // ب جـ (ب) ق (أ جـ ب) = ٩٠ ْ (جـ) طول ب جـ = طول نصف قطر الدائرة

****

(١١) فى الشكل المقابل



م دائرة طول نصف قطرها ١٥سم ، م جـ

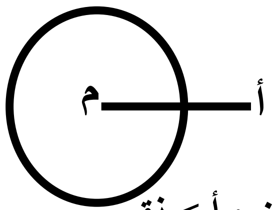
يقطع الدائرة فى ء حيث جـ ء = ٥سم

م هـ ⊥ أ جـ حيث م هـ = ١٢ سم

أوجد طول كلا من أ ب ، ب جـ

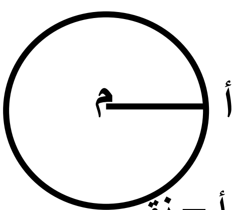
أوضاع نقطة ومستقيم بالنسبة لدائرة

أولا أوضاع نقطة بالنسبة لدائرة



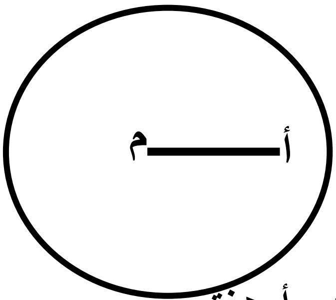
إذا كان م أ > نق

فإن أ تقع خارج الدائرة



إذا كان م أ = نق

فإن أ تقع على الدائرة



إذا كان م أ < نق

فإن أ تقع داخل الدائرة

****

مثال

بين موضع النقط أ =(-٣ ، ٧) ، ب=(-٢ ، ٦) ، جـ=(٣ ، ٥) من الدائرة التى مركزها م=(١، ٢) وطول نصف قطرها ٥سم

الحــــــل

م أ = √((٣+١)^٢ + (٧-٢)^٢) = √(١٦ + ٢٥) = √٤١ > نق — **أ تقع خارج الدائرة**

م ب = √((٢+١)^٢ + (٦-٢)^٢) = √(٩ + ١٦) = √٢٥ = ٥ = نق — **ب تقع على الدائرة**

م جـ = √((٣-١)^٢ + (٥-٢)^٢) = √(٤ + ٩) = √١٣ < نق — **جـ تقع داخل الدائرة**

****

س أكمل العبارات الاتية

١ـ دائرة م طول نصف قطرها = ١٠سم فإذا كان م أ = ١٣سم فإن أ تقع .... الدائرة

٢ـ دائرة م طول نصف قطرها = ١٠سم فإذا كان م أ = ٧سم فإن أ تقع .... الدائرة

٣- دائرة م طول نصف قطرها = ١٠سم فإذا كان م أ = ١٠سم فإن أ تقع .... الدائرة

٤- دائرة م طول نصف قطرها = ١٠سم فإذا كان م أ = صفرسم فإن أ تنطبق على .... الدائرة

٥- دائرة م طول نصف قطرها نق سم فإذا كان م أ = $\frac{٣}{٥}$ نق سم فإن أ تقع .... الدائرة

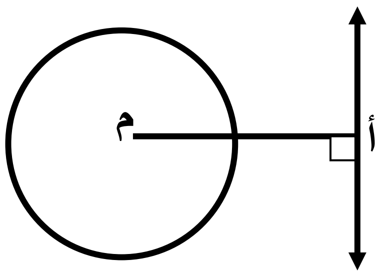
٦- دائرة م طول نصف قطرها نق سم فإذا كان م أ = $\frac{٧}{٥}$ نق سم فإن أ تقع .... الدائرة

٧- دائرة م طول نصف قطرها نق سم فإذا كان م أ = نق سم فإن أ تقع .... الدائرة

٨- دائرة طول قطرها ١٠سم فإذا كان المستقيم ل يمس الدائرة فإنه يبعد عن مركزها .... سم

٩- إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم ، أ نقطة تقع على الدائرة فإن م أ = ... سم

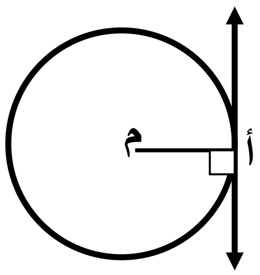
ثانياً أوضاع مستقيم بالنسبة لدائرة



إذا كان م أ > نق فإن

ل يقع خارج الدائرة

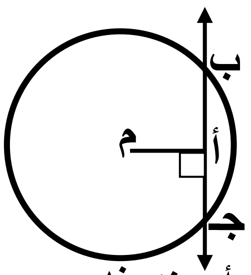
ل ∩ الدائرة = ϕ



إذا كان م أ = نق فإن

ل يكون مماس للدائرة

ل ∩ الدائرة = { أ }



إذا كان م أ < نق فإن

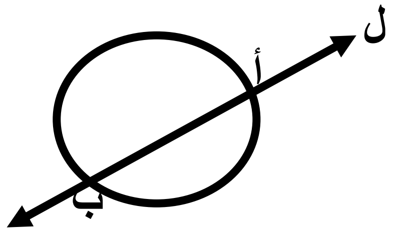
ل يكون قاطع للدائرة

ل ∩ الدائرة = { ب ، جـ }

لاحظ أن

المستقيم ل ∩ الدائرة م = { أ ، ب }

المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = $\overline{\text{أ ب}}$



****

س أكمل العبارات الاتية :-

١- دائرة مركزها م طول نصف قطرها = ٥سم ، أ ∈ ل حيث م أ   ل فإذا كان

(أ) م أ = ٧سم فإن ل يقع ....الدائرة

(ب) م أ = ٥سم فإن ل يسمى .... للدائرة

(جـ) م أ = ٢سم فإن ل يسمى .... للدائرة

٢- دائرة مركزها م طول نصف قطرها = نق ، أ ∈ ل حيث م أ   ل فإذا كان

$\frac{٢}{٥}$

(أ) م أ =   نق سم فإن ل يقع ....الدائرة

(ب) م أ = نق سم فإن ل يسمى .... للدائرة

(جـ) م أ = $\frac{٩}{٥}$ نق سم فإن ل يسمى .... للدائرة

٣- إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = ϕ فإن ل يكون .... الدائرة

٤- إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = { س } فإن ل يكون .... الدائرة

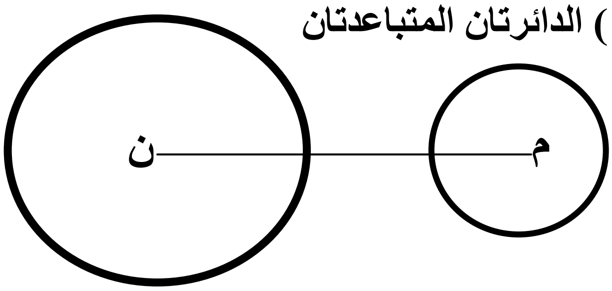
٥- إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = { س ، ص} فإن ل يكون .... الدائرة

٦- إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = { أ ، ب} فإن المستقيم ل ∩ سطح الدائرة = ...

٦- إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = { أ } فإن المستقيم ل ∩ سطح الدائرة = ...

أوضاع دائرتين بالنسبة لبعضهما

(١) الدائرتان المتباعدتان

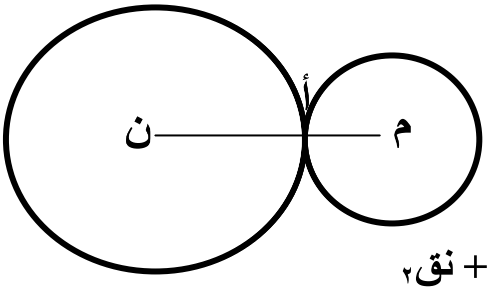


م ن > نق$_{١}$ + نق$_{٢}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = ϕ

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ϕ

(٢) الدائرتان المتماستان من الخارج

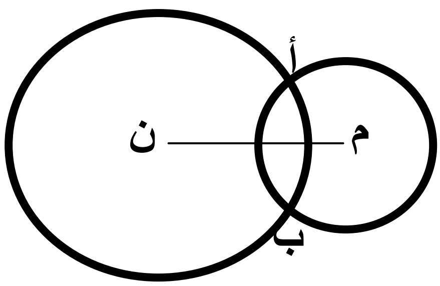


م ن = نق$_{١}$ + نق$_{٢}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ }

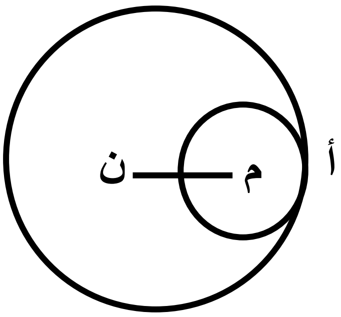
(٣) الدائرتان المتقاطعتان



نق$_{١}$ – نق$_{٢}$ < م ن < نق$_{١}$ + نق$_{٢}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب }

(٤) الدائرتان المتماستان من الداخل



م ن = نق$_{١}$ – نق$_{٢}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

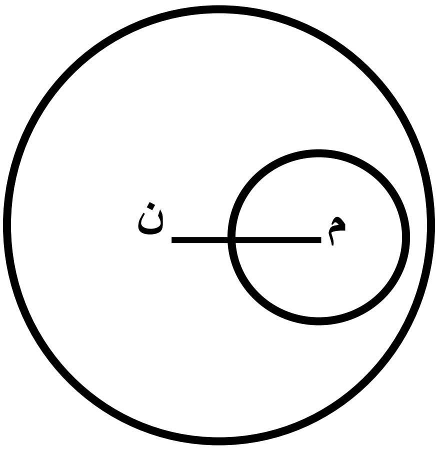
سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن =سطح م

(٥) الدائرتان المتداخلتان

م ن < نق$_1$ – نق$_2$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = ϕ

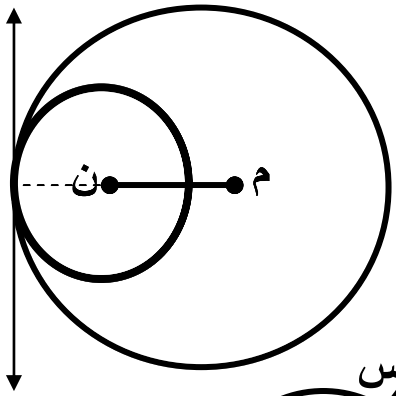
سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن =سطح م

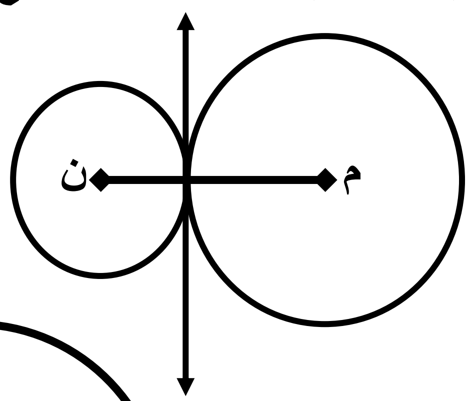


خط المركزين لدائرتين :- هو القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزيهما ($\overline{\text{م ن}}$)

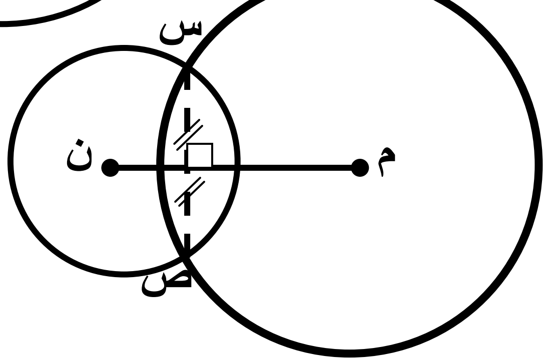
ملاحظات :-

١- خط المركزين لدائرتين متماستين من الداخل أو الخارج يكون عموديا على المماس المشترك عند نقطة التماس





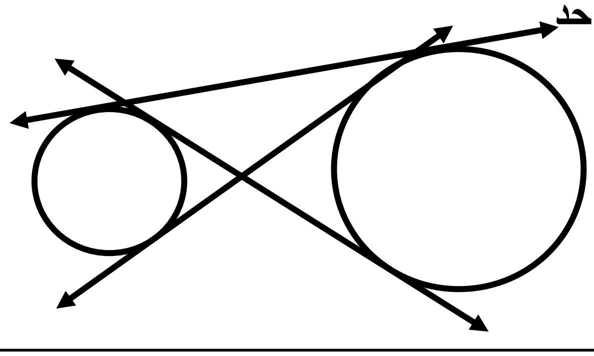
٢- خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك وينصفه

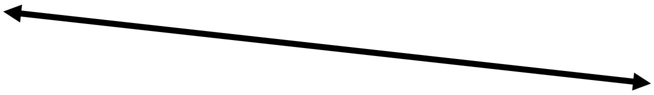


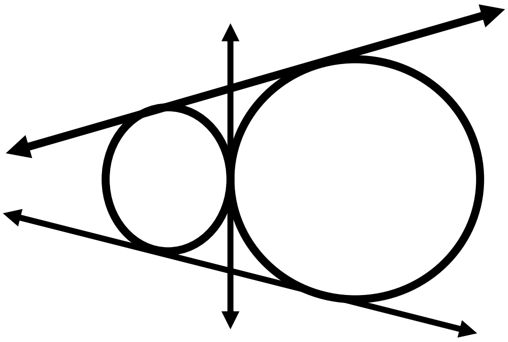
٣- الدائرتان المتداخلتان ليس لهما مماس مشترك

٤- الدائرتان المتماستان من الداخل لهما مماس مشترك واحد

٤- عدد المماس المشتركة التى يمكن رسمها لدائرتين متباعدتين = ٤ مماسات

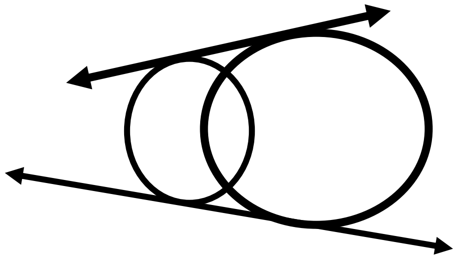






٥- عدد المماسات المشتركة التى يمكن رسمها

لدائرتين متماستين من الخارج = ٣مماسات



٦- عدد المماسات المشتركة التى يمكن رسمها

لدائرتين متقاطعتين = ٢

س أكمل العبارات الاتية

١- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ١٥سم فإن الدائرتان تكونان ....

٢- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ١٣سم فإن الدائرتان تكونان ....

٣- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ٥سم فإن الدائرتان تكونان ....

٤- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ٣سم فإن الدائرتان تكونان ....

٦- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ١سم فإن الدائرتان تكونان ....

٧- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما نق$_{١}$ سم ، نق$_{٢}$ سم فإذا كان م ن > نق$_{١}$ + نق$_{٢}$ فإن الدائرتان تكونان

....

٨- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما نق$_{١}$ سم ، نق$_{٢}$ سم فإذا كان م ن = نق$_{١}$ + نق$_{٢}$ فإن الدائرتان تكونان

....

٩- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما نق$_{١}$ سم ، نق$_{٢}$ سم فإذا كان م ن < نق$_{١}$ - نق$_{٢}$ فإن الدائرتان تكونان

....

١٠- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما نق$_{١}$ سم ، نق$_{٢}$ سم فإذا كان م ن = نق$_{١}$ - نق$_{٢}$ فإن الدائرتان

تكونان ....

١١- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما نق$_{١}$ سم ، نق$_{٢}$ سم فإذا كان نق$_{١}$ – نق$_{٢}$ < م ن < نق$_{١}$ + نق$_{٢}$ فإن

الدائرتان تكونان ....

١٢- إذا كانت الدائرة م $\cap$ الدائرة ن = ϕ فإن الدائرتان تكونان .... أو ....

١٣- إذا كانت الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ } فإن الدائرتان تكونان .... أو ....

١٤- إذا كانت سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ } فإن الدائرتان تكونان ....

١٥- إذا كانت سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن فإن الدائرتان تكونان ....

أو ....

١٦- إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ϕ فإن الدائرتان تكونان ....

١٧- عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين = ...

١٨- عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستان من الخارج = ...

١٩- عدد المماسات المشتركة لدائرتين متقاطعتين = ...

٢٠- عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستان من الداخل = ...

٢١- عدد المماسات المشتركة لدائرتين متداخلتين = ...

حقائق هندسية

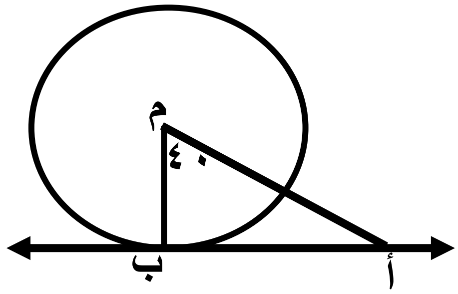
١- المماس لدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس
٢- المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايته يكون مماس للدائرة
٣- المماسان لدائرة المرسومان من نهايتى قطر فيها متوازيان

****

مثال فى الشكل المقابل

أ ب مماس للدائرة م عند ب ، ق(أ م ب) = ٤٠°

أوجد ق (م أ ب)



الحـــــــل

أ ب مماس للدائرة م عند ب ، م ب نصف قطر
م ب ⊥ أ ب ق(أ ب م) = ٩٠°
مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

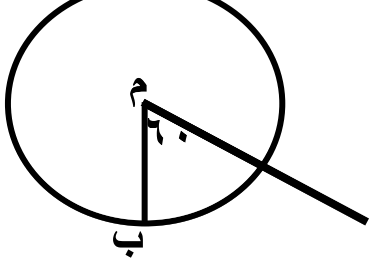
ق (م أ ب) = ١٨٠ – [٩٠+٤٠]
= ١٨٠° – ١٣٠° = ٥٠°

****

مثال فى الشكل المقابل

أ ب مماس للدائرة م عند ب ، ق(أ م ب) = ٦٠°

، أ ب = ١٠سم أوجد طول نصف قطر الدائرة



الحـــــــل

أ ب مماس للدائرة م عند ب ، م ب نصف قطر

م ب ⊥ أ ب   ق(أ ب م) = ٩٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

ق (م أ ب) = ١٨٠ – [٩٠+٦٠]

= ١٨٠° – ١٥٠° = ٣٠°

نق = ب م = $\frac{١}{٢}$ أ م = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ = ٥سم

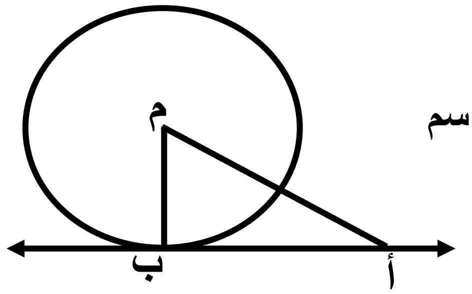
****

مثال

فى الشكل المقابل

أ ب مماس للدائرة م عند ب ، طول نصف قطر الدائرة = ٣سم

، أ ب = ٤ سم أوجد طول أ م



الحـــــــــل

أ ب مماس للدائرة م عند ب ، م ب نصف قطر

م ب ⊥ أ ب   ق(أ ب م) = ٩٠°

(أ م)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب م)^{٢}

(أ م)^{٢} = (٣)^{٢} + (٤)^{٢} = ٩+١٦ = ٢٥

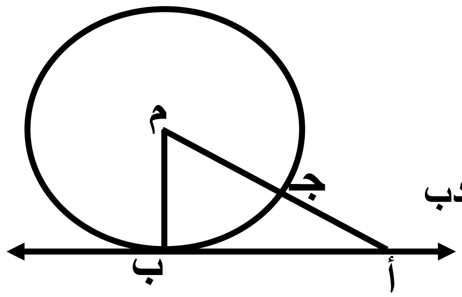
أ م = $\sqrt{٢٥}$ = ٥سم

مثال

فى الشكل المقابل

دائرة م طول نصف قطر الدائرة = ٦سم

، أ ب = ٨ سم ، أ جـ = ٤سم إثبت أن أ ب مماس للدائرة م عندب



الحـــــــــل

أ م = أ جـ + جـ م = ٤ + ٦ = ١٠سم

(أ م)^{٢} = (١٠)^{٢} = ١٠٠

(أ ب)^{٢} + (ب م)^{٢} = (٨)^{٢}+(٦)^{٢}=٦٤+٣٦=١٠٠

(أ م)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب م)^{٢}

ق (م ب أ) = ٩٠°

م ب ⊥ أ ب

∴ أ ب مماس للدائرة م عند أ

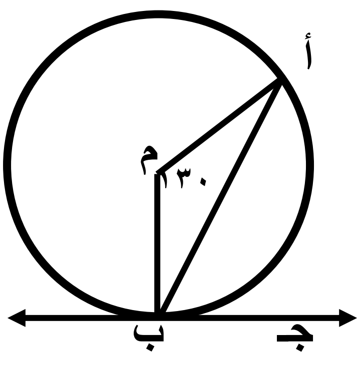
****

مثال

فى الشكل المقابل

جـ ب مماس للدائرة م عند ب ، ق (أ م ب) = ١٣٠°

أوجد ق (أ ب جـ)



الحـــــــــل

ب جـ مماس للدائرة م عند ب ، ب م نصف قطر

م ب ⊥ ب جـ   ق(م ب جـ) = ٩٠°

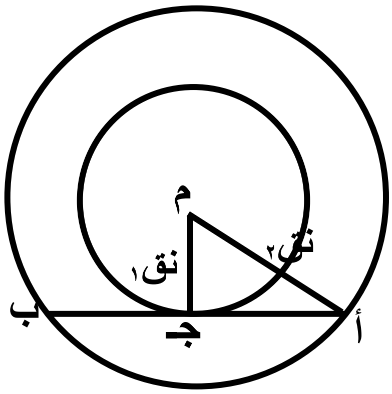
ق(أ ب جـ) = ٩٠° – ٢٥° = ٥٥°

فى △ أ م ب   م ب = م أ (أنصاف أقطار)

ق(م ب أ) = ق(م أ ب) = $\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥°

****

مثال فى الشكل المقابل



دائرتان لهما نفس المركز م ، أ ب وتر فى الدائرة الكبرى يمس الدائرة الصغرى عند جـ ، أ ب = ١٠سم احسب المساحة المحصورة بين الدائرتين

الحـــــل

أ ب مماس للدائرة الصغرى ∴ م جـ ⊥ أ ب

∴ جـ منتصف أ ب ∴ أ جـ = ٥سم

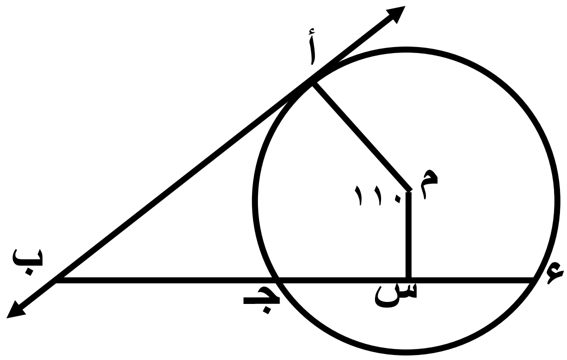
المساحة المحصورة بين الدائرتين = ط نق$_٢^٢$ − ط نق$_١^٢$

= ط [نق$_٢^٢$ − نق$_١^٢$]

= ط [(أ م)^٢ − (جـ م)^٢] = ط (أ جـ)^٢

= ط (٥)^٢ = ٢٥ ط

مثال فى الشكل المقابل



إذا كانت س منتصف ء جـ ، أ ب مماس للدائرة م عند أ ، ق (أ م س) = ١١٠

أوجد ق (ب)

الحـــــل

س منتصف ء جـ ∴ ق(م س جـ) = ٩٠°

أ ب مماس ، م أ (نق) ∴ ق(م أ ب)=٩٠°

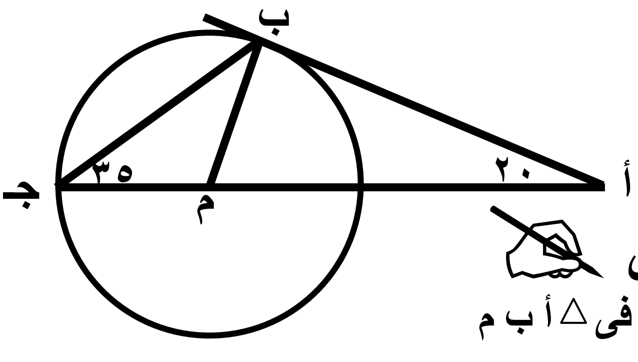
مجموع قياسات زوايا الرباعى = ٣٦٠°

ق(ب) = ٣٦٠° − [٩٠° +٩٠° + ١١٠]

= ٣٦٠ − ٢٩٠ = ٧٠°

****

مثال فى الشكل المقابل



إثبت أن أ ب مماس للدائرة م إذا كان

ق(ب جـ م) = ٣٥° ، ق(أ)=٢٠°

الحـــــل

فى△ب م جـ   م ب = م جـ (أنصاف أقطار)

∴ ق(م ب جـ) = ق(م جـ ب) = ٣٥°

ق(أ م ب) = ق(م ب جـ) + ق(م جـ ب)

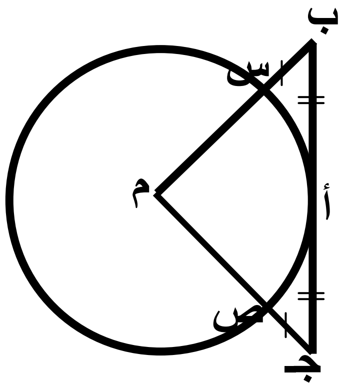
فى △ أ ب م

ق(أ ب م) = ١٨٠ − [٧٠ + ٢٠] = ٩٠°

∴ م ب ⊥ أ ب

= ٣٥° + ٣٥° = ٧٠° ∴ أ ب مماس للدائرة م عند ب

****



مثال فى الشكل المقابل

ب س = جـ ص ،، أ ب = أ جـ إثبت أن

(١) م ب = م جـ (٢) ب جـ مماس للدائرة م

الحـــــــــل

م س = م ص = نق ، ب س = جـ ص

م س + س ب = م ص + ص جـ

م ب = م جـ (وهو المطلوب أولا)

فى △ م ب جـ

م ب = م جـ (مثلث متساوى الساقين)

أ منتصف ب جـ

م أ ⊥ ب جـ

∴ ب جـ مماس للدائرة م عند أ

تمارين

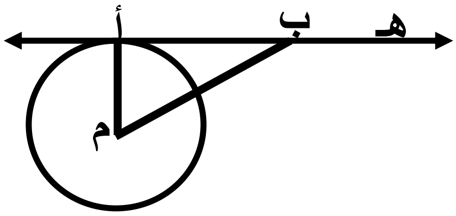
[١] بأستخدام كلا من الاشكال الاتية أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

١ـ إذا كان أ ب مماسا للدائرة م عند أ

، ق (م ب هـ) = ١٢٠°

فإن ق (أ م ب) = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٨٠° (ء) ٩٠°



@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

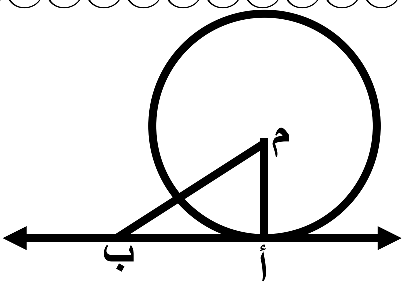
٢ـ إذا كان أ ب مماسا للدائرة م عند أ

أ ب = أ م

فإن

ق(م) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (ء) ٩٠°

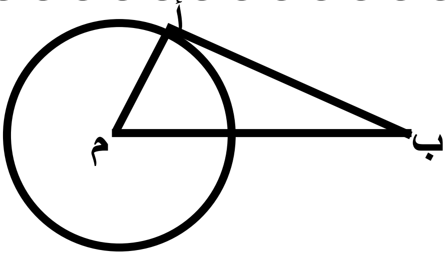


@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

٣ـ إذا كان أ ب تمس الدائرة م عند أ

أ م = ٦سم ، م ب = ١٠ سم

فإن



أ ب= ......سم

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (ء) ١٢

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

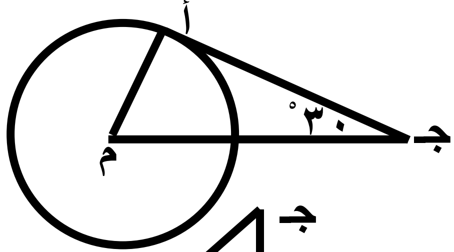
٤- جـ أ يمس الدائرة م عند أ

ق(أ جـ م) = ٣٠ ْ

فإذا كان طول نصف قطر الدائرة = ٥سم

فإن م جـ = ... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٥ ٣ (ء) ٢.٥



@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

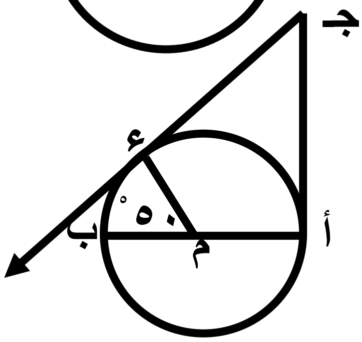
٥- أ ب قطر فى الدائرة م

جـ أ ، جـ ء يمسان الدائرة عند أ ، ء

فإذا كان ق(ء م ب) = ٥٠ ْ

فإن ق(جـ) = ...

(أ) ٥٠ ْ (ب) ١٣٠ ْ (جـ) ٩٠ ْ (ء) ٤٠ ْ



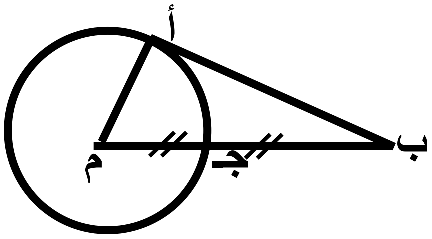
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

٦- إذا كانت أ ب تمس الدائرة م عند أ

م ب ∩ الدائرة م = { جـ }

حيث م جـ = ب جـ فإن ق(ب) = ...

(أ) ٣٠ ْ (ب) ٤٥ ْ (جـ) ٦٠ ْ (ء) ٩٠ ْ

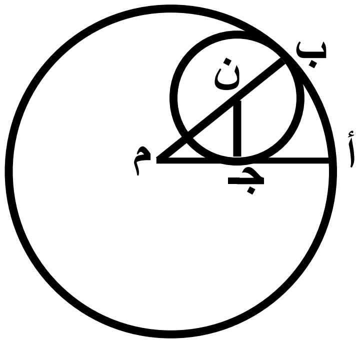


[٢] فى الشكل المقابل

دائرتان م ، ن متماستان من الداخل فى ب

أ م تمس الدائرة ن فى جـ فإذا كان طولا نصفى

قطريهما ٩سم ، ٤سم على الترتيب أوجد طول أ جـ



@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٣] دائرة م طول نصف قطرها نق١ = ٤سم تمس دائرة ن فإذا كان م ن = ٧سم أوجد النسب الاتية

(أ) محيط الدائرة م : محيط الدائرة ن (ب) مساحة الدائرة م : مساحة الدائرة ن

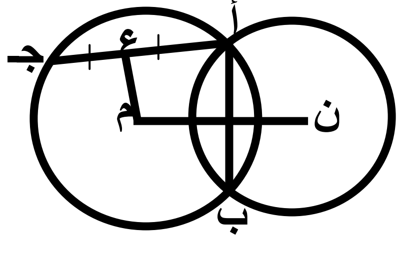
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٤] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

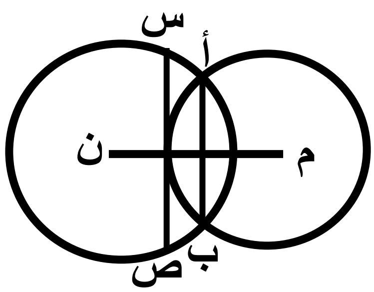
أ ب ∩ ن م = { هـ } ، أ جـ وتر فى الدائرة م

ء منتصف أ جـ أوجد ق (ب أ جـ)



@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٥] فى الشكل المقابل



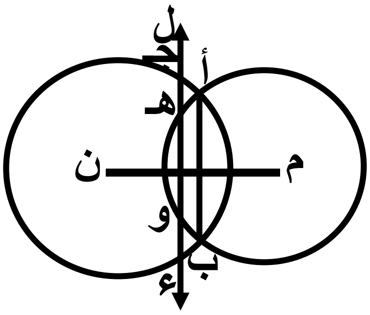
م ، ن دائرتان متقاطعتان ، أ ب الوتر المشترك

للدائرتان م ، ن ، س ص تمس الدائرة م عند جـ

إثبت أن أ ب // س ص

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٦] فى الشكل المقابل



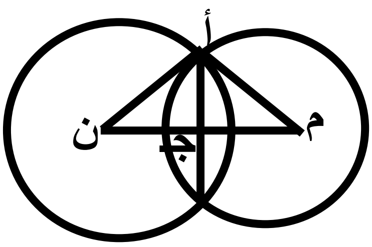
أ ب الوتر المشترك للدائرتين المتقاطعتين م ، ن

المستقيم ل // أ ب ويقطع الدائرة م فى هـ ، و

ويقطع الدائرة ن فى جـ ، ء إثبت أن جـ هـ = و ء

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٧] فى الشكل المقابل

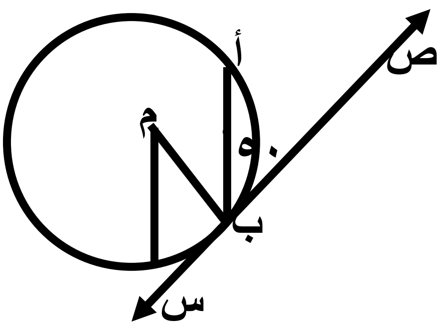


دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب

م أ = ٩سم ، أ ن = ١٢سم ، م ن = ١٥سم

أوجد طول أ ب

[٨] فى الشكل المقابل



دائرة مركزها م ، الوتر أ ب // م جـ

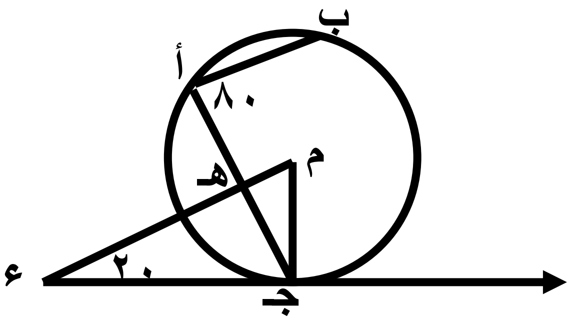
ص س مماس للدائرة عند ب

فإذا كان ق (أ ب ص) = ٥٠ْ

أوجد ق (جـ ب س)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٩] فى الشكل المقابل



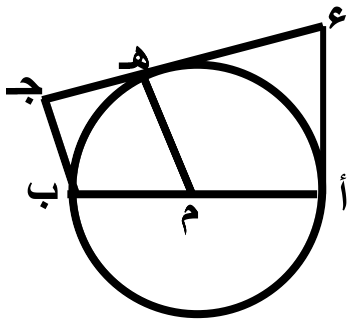
ء جـ يمس الدائرة م عند جـ ، أ ب // م ء

ق(ب أ جـ) = ٨٠ْ ، ق (م ء جـ) = ٢٠ْ

أ جـ ∩ م ء = { هـ }

أوجد ق (هـ جـ م)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@



[١٠] فى الشكل المقابل

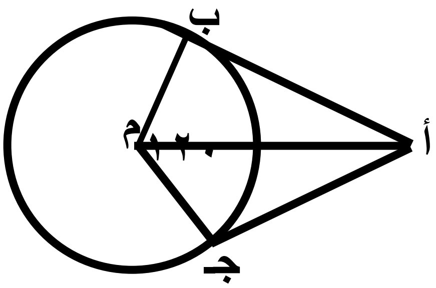
أ ب قطر فى الدائرة م ، أ ء ، ب جـ مماسان للدائرة عند أ ، ب

ء جـ مماس للدائرة عند هـ

إثبت أن (١) ق(أ ء هـ)+ ق(ب جـ هـ) = ١٨٠°

(٢) ق (أ م هـ) = ق (ب جـ هـ)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@



[١١] فى الشكل المقابل

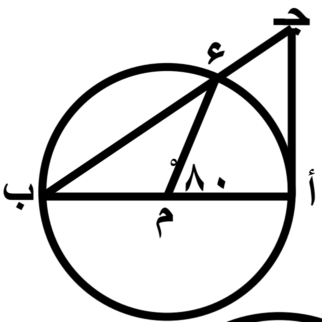
أ ب ، أ جـ مماستان لدائرة مركزها م فإذا كان

ق (ب م جـ) = ١٢٠° أوجد ق(ب أ جـ)

ثم أثبت أن

(١) أ م ينصف أ (٢) م ب = $\frac{١}{٢}$ م أ

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

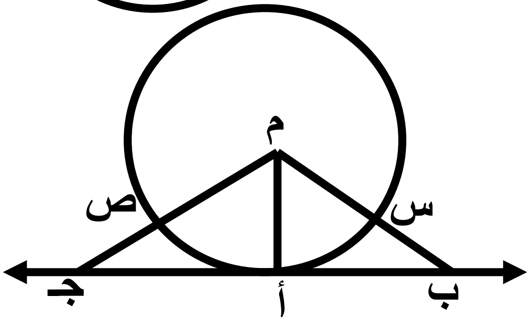


[١٢] فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى دائرة مركزها م

أ جـ مماس لها عند أ ، ق (أ م ء) = ٨٠° أوجد

(١) ق (جـ أ ء) (٢) ق(أ ب ء) (٣) ق (أ ء ب)



[١٣] فى الشكل المقابل

ب جـ مما للدائرة م عند أ ، م ب ∩الدائرة م = {س}

م جـ ∩ الدائرة م = { ص} فإذا كان ب س = جـ ص

فإثبت أن ق(ب م أ) = ق (جـ م أ)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

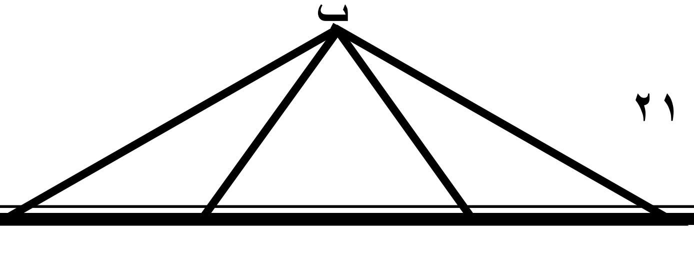
[١٤] أ ب ، جـ ء قطران متعامدان فى دائرة مركزها م ، رسم أ ي ، جـ ص مماسان للدائرة عند أ ،جـ

فإذا كان أ س ∩ جـ ص = { هـ } إثبت أن أ م جـ هـ مربع

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[١٥] فى الشكل المقابل

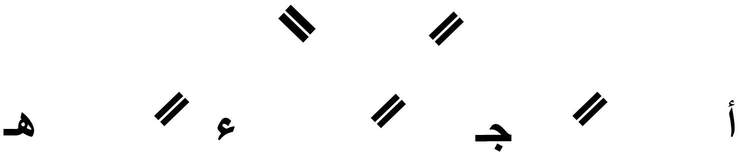
ب جـ ء مثلث متساوى الاضلاع



أ ، هـ ∈ جـ ء بحيث أ جـ = جـ ء = ء هـ

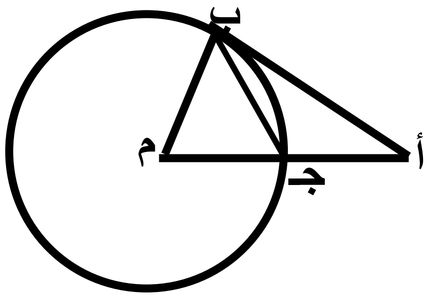
إثبت أن أ ب تمس الدائرة التى تمر برؤوس

المثلث ب جـ هـ



@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[١٦] فى الشكل المقابل



ب جـ وتر فى الدائرة م ، أ ∈ م جـ

ق(أ) = ق(جـ ب أ) ، ب جـ = ب م

إثبت أن أ ب مماس للدائرة م عند ب

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

مسائل تربط الوحدة الاولى بالثانية

[١٧] عين مواضع النقط الاتية بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها ٥ وحدة طول علما بأن

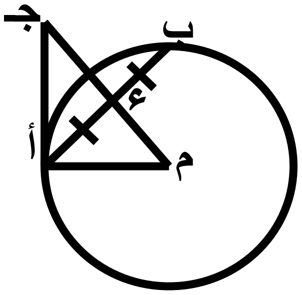
م (٠ ، ٠)

(١) أ (-٣ ، ٤) (٢) ب (٢ ، ٣) (٣) جـ(٦ ، ٨)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[١٨] أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة بالنقطة (-٣ ، ٤) ومركزها نقطة الاصل

[١٩] إذا كان أ جـ يمس الدائرة م عند أ



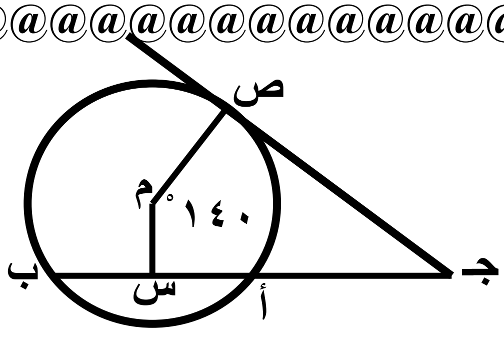
ء منتصف الوتر أ ب ،

ق (أ جـ م) = ٥٠ °

فإن ق (ب أ م) = ...

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٢٠] فى الشكل المقابل



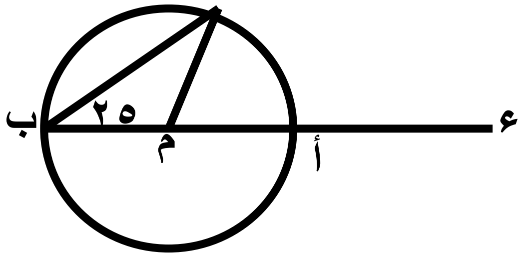
جـ ص مماس للدائرة م

س منتصف أ ب

ق (ص م س) = ١٤٠ ° أوجد ق(جـ)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٢١] فى الشكل المقابل



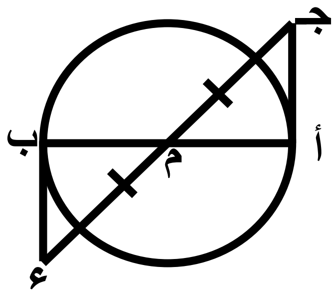
أ ب قطر فى الدائرة م ، ء ∋ ب أ

فإذا كان ء جـ مماس للدائرة عند جـ

ق(ب) = ٢٥° أوجد ق (ء)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٢٢] فى الشكل المقابل



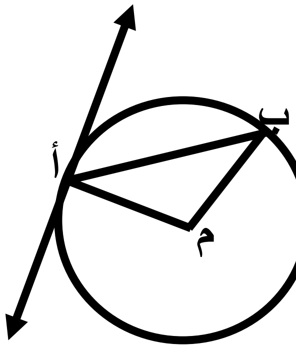
أ ب قطر فى الدائرة م ، أ جـ مماس لها عند أ

رسم جـ م وفرضت عليه نقطة ء بحيث جـ م = م ء

إثبت أن ب ء مماس للدائرة عند ب

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٢٣] فى الشكل المقابل



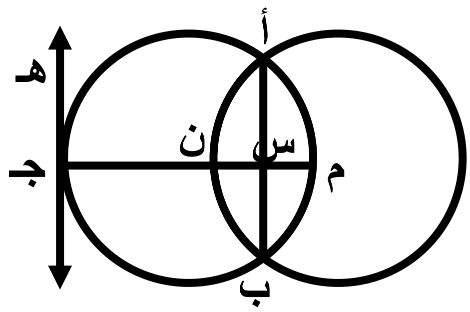
أ ب وتر فى دائرة مركزها م بحيث ق(أ م ب) = ٩٠°

أ جـ مماس للدائرة م عند أ

١- إثبت أن أ جـ // م ب

٢- أوجد ق (ب أ جـ)

[٢٤] فى الشكل المقابل



م ، ن دائرتان متطابقتان حيث م ∋ الدائرة ن

ن ∋ الدائرة م ، جـ هـ مماس للدائرة ن

إثبت أن (١) أ ب // جـ هـ (٢) م س = س ن

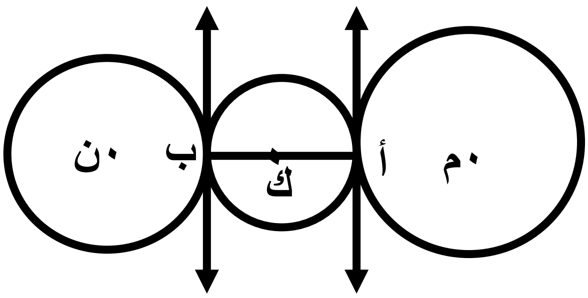
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٢٥] فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة ك ، رسمت دائرة م تمس

الدائرة ك عند أ ، رسمت دائرة ن تمس الدائرة ك

عند ب ، ل، مماس مشترك للدائرتين ك ، م

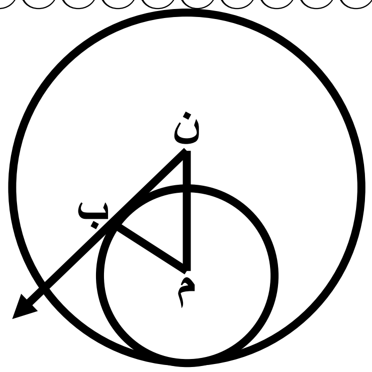


ل$_{2}$ مماس مشترك للدائرتين ك ، ن إثبت أن

(١) ل$_{1}$ // ل$_{2}$ (٢) م ، أ ، ب ، ن على أستقامة واحدة

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٢٦] فى الشكل المقابل



م ، ن دائرتان متماستان من الداخل عند أ

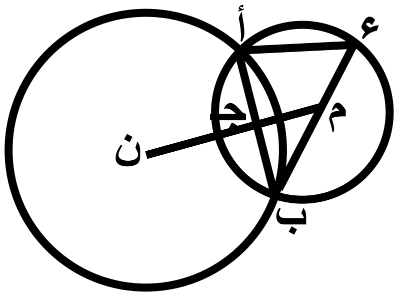
ن ب مماس للدائرة م عند ب

فإذا كان م ب = ٤سم ، ن ب = ٣سم

فأوجد طول نصف قطر الدائرة ن

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٢٧] فى الشكل المقابل



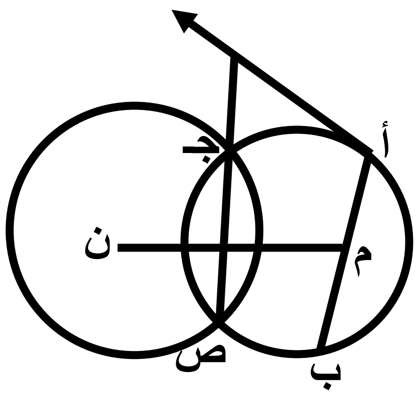
م ، ن دائرتان فى أ ، ب

أ ب ∩ م ن = { جـ } ، ب ء قطر فى الدائرة م

ب جـ = ٤سم ، م ء = ٥سم أوجد طول أ ء

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٢٨]فى الشكل المقابل



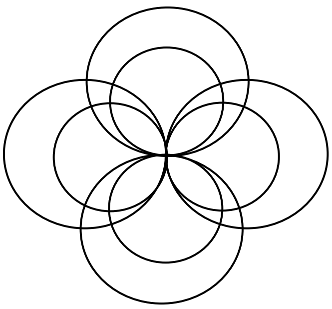
م ، ن دائرتان متقاطعتان فى جـ ، ص

رسم ب أ قطر فى الدائرة م ، أ س مماس للدائرة م عند أ

أ س ∩ ص جـ = { ء } إثبت أن

ق(ب م ن) = ق (أ ء ص)

تعيين الدائرة



تعيين دائرة تمر بنقطة معلومة

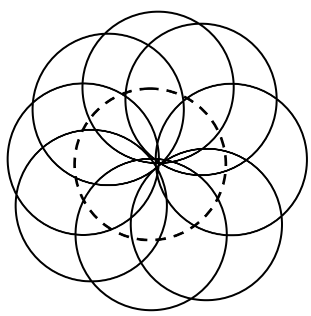
يوجد عدد لا نهائى من الدوائر التى تمر بنقطة معلومة

فى المستوى (أ)

* إذا كانت أنصاف أقطار هذه الدوائر متساوية فى

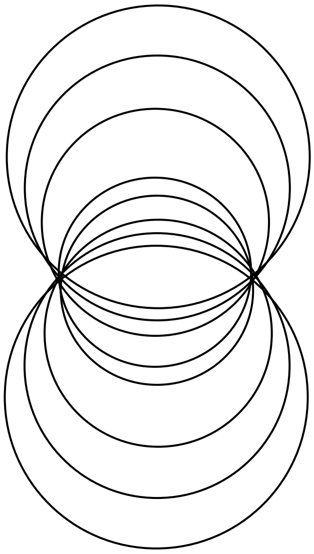
الطول فإن مراكزها تقع جميعا على محيط دائرة

واحدة



****

تعيين دائرة تمر بنقطتين معلومتين



يوجد عدد لا نهائى من الدوائر التى تمر بنقطتين معلومتين فى المستوى أ ، ب

(١) مراكز هذه الدوائر على محور أ ب [محور القطعة هو المستقيم العمودى عليها من منتصفها]

(٢) أصغر دائرة يمكن رسمها لتمر بين النقطتين أ ، ب طولها يساوى نصف طول أ ب

[إذا كان طول أ ب = ١٠سم فإن أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب يكون طول نصف قطرها =٥سم]

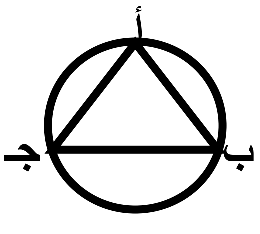
طول نصف قطر الدوائر المارة بنقطتين معلومتين يكون≤ نصف البعد بين النقطتين

****

تعيين دائرة تمر بثلاث نقط

(أ) تعين دائرة تمر بثلاث نقط على أستقامة واحدة:-
لا يمكن رسم دائرة واحدة تمر بثلاث نقط على أستقامة واحدة
(ب) تعيين دائرة تمر بثلاث نقط ليست على أستقامة واحدة
يمكن رسم دائرة وحيدة تمر بثلاث نقط ليست على أستقامة واحدة

الدائرة الخارجة للمثلث :-

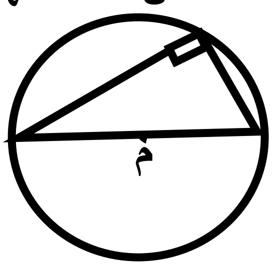


هى الدائرة التى تمر برؤوس المثلث من الخارج

لاحظ أن

١- مركز الدائرة الخارجة للمثلث هى نقطة تقاطع الاعمدة المقامة على أضلاعه من منتصفاتها

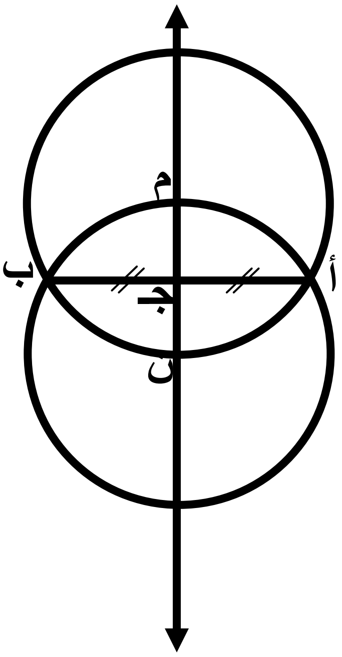
٢- مركز الدائرة الخارجة للمثلث القائم الزاوية هو منتصف الوتر



****

مثال ارسم القطعة المستقيمة أ ب طولها ٥سم ثم أرسم دائرة يكون أ ب وتر فيها كم دائرة يمكن رسمها ؟

الحـــــــل



الخطوات :-

١- نرسم أ ب بحيث أ ب = ٥سم ثم ننصف أ ب فى جـ

٢- نرسم محور أ ب وليكن ل

٣- نركز فى احدى نهايتى أ ب بسن الفرجار بفتحة تساوى اكبر من نصف أ ب قليلا

٤- نرسم قوساً يقطع المستقيم ل فى نقطتى م ، ن

٥- نركز بسن الفرجار فى م وبنفس الفتحة نرسم الدائرة م فتمر بالنقطتين أ ، ب ثم نركز فى ن بنفس الفتحة ونرسم الدائرة ن

لاحظ أن :- يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر مختلفة فى طول نصف القطر بحيث يكون أ ب وترا فيها

تمارين (٨) على تعيين الدائرة ورسمها

[١] أختر الاجابة الصحيحة مما بين القوسين

١- يمكن رسم .... تمر بنقطة معلومة

(أ) دائرة واحدة (ب) دائرتان

(جـ) ثلاث دوائر (ء) عدد لا نهائى من الداوائر

٢- عدد الدوائر المارة بطرفى قطعة مستقيمة

(أ) دائرة واحدة (ب) دائرتان

(جـ) ثلاث دوائر (ء) عدد لا نهائى من الداوائر

٣- أى ثلاث نقط لا تنتمى لمستقيم واحد ....

(أ) لا يمكن رسم دائرة تمر بها (ب) تمر بها دائرة واحدة

(جـ) تمر بها دائرتان (ء) تمر بها عدد لا نهائى من الدوائر

٤- يمكن تعيين دائرة بمعلومية ....

(أ) ثلاث نقط ليست على أستقامة واحدة (ب) نقطتين

(جـ) ثلاث نقط على أستقامة واحدة (ء) نقطة واحدة

٥- عدد الدوائر التى يمكن أن تمر بأى ثلاث رؤوس لمتوازى أضلاع يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (ء) عدد لا نهائى

٦- جميع الدوائر التى تمر بالنقطتين أ ، ب تقع مراكزها جميعا على ....

(أ) $\overline{\text{أ ب}}$ (ب) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

(جـ) محور تماثل أ ب (ء) نقطة منتصف أ ب

٧- مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث هو نقطة تقاطع ....

(أ) متوسطاته (ب) أرتفاعاته

(جـ) منصفات زواياه الداخلة (ء) محاور تماثل أضلاعه

٨- إذا كان المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب فإن مركز الدائرة المارة برؤوسه هو ....

(أ) منتصف أ ب (ب) منتصف أ جـ

(جـ) منتصف ب جـ (ء) خارج المثلث

٩- لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ....

(أ) مستطيل (ب) مثلث (جـ) مربع (ء) معين

١٠- إذا كانت أ ، ب نقطتين فى المستوى بحيث أ ب = ٤سم فإن طول نصف قطر أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب هو ....

(أ) ٢سم (ب) ٣سم (جـ) ٤سم (ء) ٨سم

@@

[٢] أكمل ما يأتى

١- تتعين الدائرة إذا علم مركزها وطول ....

٢- الدائرة التى تمر برؤوس مثلث تسمى دائرة ....

٣- إذا كانت أ ب = ٦سم فإن عدد الدوائر التى طول نصف قطرها ٥سم وتمر بالنقطتين أ ، ب هو ....

٤- إذا كانت أ ب = ٥.٤سم فإن عدد الدوائر التى طول نصف قطرها ٢.٧سم وتمر بالنقطتين أ ، ب هو ....

٥- أكبر طول لقطعة مستقيمة يقع طرفاها على دائرة طول نصف قطرها ٧سم يساوى ....

@@

[٣] ل مستقيم فى المستوى ، أ نقطة تبعد عن المستقيم ل بمقدار ٢سم بين كيف ترسم دائرة طول نصف قطرها ٣سم بحيث تمر بالنقطة أ ويقع مركزها على المستقيم ل كم عدد الحلول

@@

[٤] إذا كانت أ ∋ ل فأرسم دائرة تمر بنقطة أ ويكون طول نصف قطرها ٣سم عندما

(١) م تنتمى للمستقيم ل – كم دائرة يمكن رسمها

(٢) م لا تنتمى للمستقيم ل – كم دائرة يمكن رسمها

@@

[٥] أ ب قطعة مستقيمة طولها ٨سم أرسم الدائرة التى تمر بالنقطتين أ ، ب وطول نصف قطرها ٥سم ، كم حلا لهذه المسألة

[٦] أ ب قطعة مستقيمة طولها ٦سم أرسم الدائرة التى تمر بالنقطتين أ ، ب وطول نصف قطرها أصغر ما يمكن

@@

[٧] أرسم س ص قطعة مستقيمة طولها ٥سم وأرسم الدائرة ص التى طول نصف قطرها ٣سم ثم

أرسم دائرة مركزها يقع على الدائرة ص وتمر بالنقطة س وطول نصف قطرها ٢.٥ سم كم دائرة يمكن رسمها

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٨] أرسم دائرة مركزها ن وطول نصف قطرها ٢سم ثم خذ نقطة أ خارج الدائرة بحيث ن أ = ٣سم بين كيف ترسم دائرة طول نصف قطرها ٢سم بحيث تمر بالنقطة ويقع مركزها على الدائرة ن كم عدد الحلول

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٩] أرسم دائرة طول نصف قطرها ٣سم تمس مستقيما ل ثم أذكر عدد الحلول للمسألة

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[١٠] أرسم $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمين متوازيين البعد بينهما ٥سم ثم أرسم دائرة مركزها يقع على $ل_١$ وتمس $ل_٢$

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[١١] أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٤سم ، ب جـ = ٥سم ، جـ أ = ٦سم أرسم الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[١٢] بأستخدام الادوات الهندسية أرسم المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه أ ب = ٣سم ب جـ = ٤سم ثم أرسم دائرة تمر برؤوسه ومن الرسم أوجد طول نصف قطر الدائرة

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[١٣] بأستخدام الادوات الهندسية أرسم المثلث أ ب جـ متساوى الاضلاع وطول ضلعه ٦سم ثم أرسم الدائرة المارة برؤوسه

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

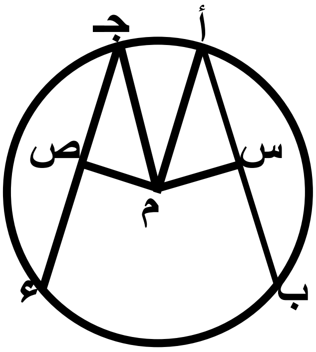
[١٤] أرسم المثلث أ ب جـ الذى فيه ب جـ = ٧سم ، ق(ب) = ١٢٠ ° ، ق (جـ) = ٣٠ ° ثم أرسم الدائرة التى تمر برؤوس المثلث وأحسب مساحتها

علاقة أوتار الدائرة بمركزها

نظرية (٢ – ١)

الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة تكون على أبعاد متساوية من مركزها

المعطيات : أ ب = جـ ء ، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ جـ ء



المطلوب : إثبات أن م س = م ص

البرهان : م س ⊥ أ ب ∴ س منتصف أ ب ∴ أ س= $\frac{1}{2}$ أ ب

م ص ⊥ جـ ء ∴ ص منتصف جـ ء ∴ جـ ص= $\frac{1}{2}$ أ ب

أ ب = جـ ء ∴ أ س = جـ ص

△ △ أ س م ، جـ ص م

فيهما
- **أ س = جـ ص**
- **أ م = جـ م (أنصاف أقطار)**
- **ق(أ س م) = ق(جـ م ص)= ٩٠°**

∴ △أ س م ≡ △ جـ ص م

ومن التطابق ينتج أن

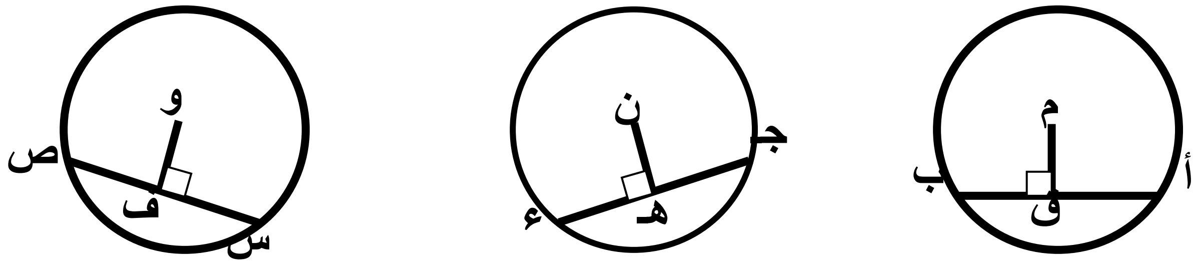
س م = ص م

وهو المطلوب إثباته

****

نتيجة

فى الدوائر المتطابقة الاوتار المتساوية فى الطول تكون على أبعاد متساوية من مراكزها

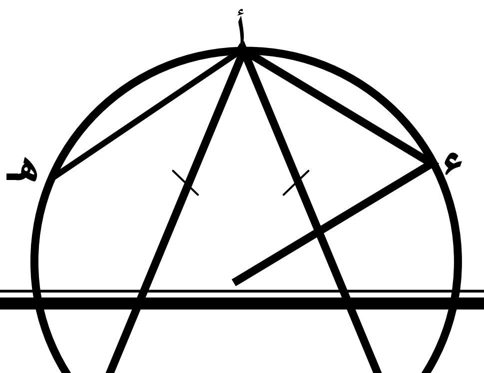


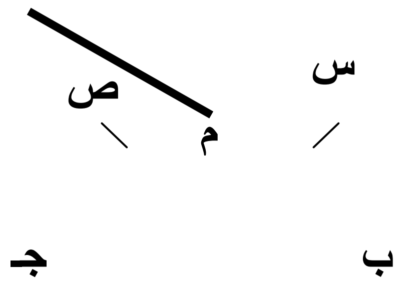
إذا كانت الدوائر م ، ن ، و متطابقة ، أ ب = جـ ء = س ص فإن م ق = ن هـ = و ف

مثال

فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، س منتصف أ ب ، ص منتصف أ جـ





م س يقطع الدائرة فى ء ، م ص يقطع الدائرة فى هـ

إثبت أن(١) س ء = ص هـ

(٢) ق(ء أ س) = ق (هـ أ ص)

الحــــــــل

س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب

ص منتصف أ جـ ∴ م ص ⊥ أ جـ

أ ب = أ جـ ∴ م س = م ص (١)

م ء = م هـ (أنصاف أقطار) (٢)

بطرح ٢ من ١

م ء – م س = م هـ - م ص

س ء = هـ ص (وهو المطلوب أولا)

△△ أ ء س ، أ هـ ص

فيهما
أ س = أ ص
ء س = هـ ص (مثبت)
ق(أ ء س)=ق(أ ص هـ)=٩٠°

△ أ ءس ≡ △ أ هـ ص

ومن التطابق ينتج أن

ق(ء أ س) = ق (هـ أ ص) [المطلوب ثانياً]

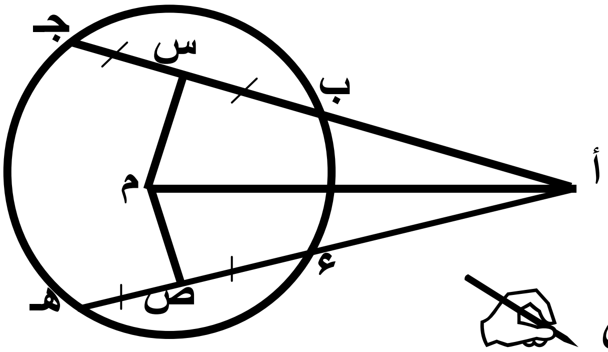
****

مثال

فى الشكل المقابل

ب جـ = ء هـ ، س منتصف ب جـ

ص منتصف ء هـ إثبت أن أ ب = أ ء



الحــــــــل

س منتصف ب جـ ∴ م س ⊥ ب جـ

ص منتصف ء هـ ∴ م ص ⊥ ء هـ

ب جـ = ء هـ ∴ م س = م ص

△△ أ م س ، أ م ص

فيهما
أ م ضلع مشترك
م س = م ص
ق(أ س م)=ق(أ ص م) = ٩٠°

△أ س م ≡ △ أ ص م

ومن التطابق ينتج أن

أ س = أ ص (١)

ولكن ب س = ء ص (٢)

بطرح ٢ من ١

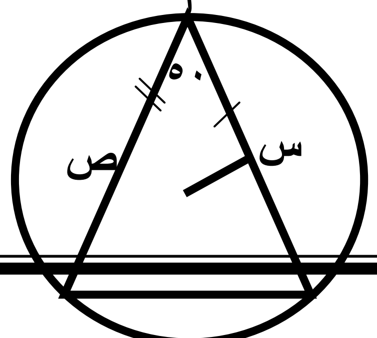
أ س – ب س = أ ص – ء ص

أ ب = أ ء وهو المطلوب إثباته

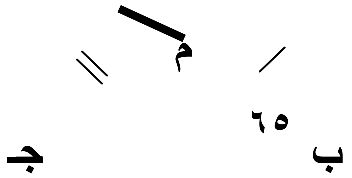
مثال

فى الشكل المقابل

ق(أ) = ٥٠° ، ق(ب) = ٦٥° ، س ، ص منتصفا



أ ب ، أ جـ على الترتيب



(١) أوجد ق(س م ص)   (٢) إثبت أن م س= م ص

الحــــــــل

مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = ١٨٠ ْ

ق(جـ) = ١٨٠ ْ – [٥٠ ْ +٦٥ ْ] = ٦٥ ْ

ق(ب) = ق(جـ)   ∴ أ ب = أ جـ

س منتصف أ ب   م س ⊥ أ ب

ق(م س أ) = ٩٠ ْ

ص منتصف أ جـ   ∴ م ص   أ جـ

∴ ق(م ص أ) = ٩٠ ْ

ق(س م ص) =٣٦٠ – [٥٠+٩٠+٩٠]=١٣٠

أ ب = أ جـ ، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

∴ م س = م ص

****

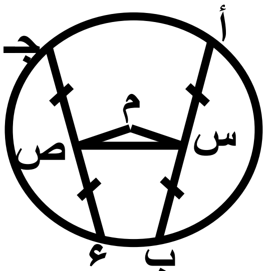
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب ، جـ ء وتران متساويان فى الدائرة م

س منتصف أ ب ، ص منتصف جـ ء

برهن أن ق(ب س ص) = ق (ء ص س)



الحــــــــل

س منتصف أ ب   ∴ ق(م س ب) = ٩٠ ْ

ص منتصف جـ ء   ∴ ق(م ص ء) = ٩٠

∴ ق(م س ب) = ق(م ص ء)   (١)

أ ب = جـ ء ، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ جـ ء

∴ م س = م ص

فى △ م س ص   م س = م ص

∴ ق(م س ص) = ق(م ص س) (٢)

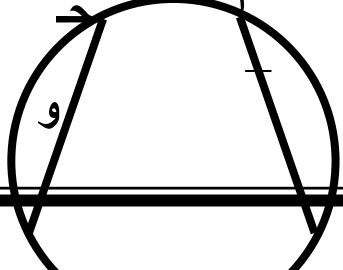
بطرح ٢ من ١ ينتج أن

ق(ب س ص) = ق (ء ص س)

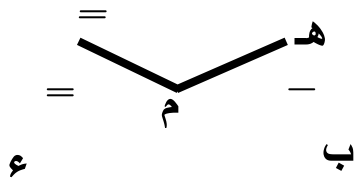
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

اذكر الله

تمــــارين



(١) فى الشكل المقابل



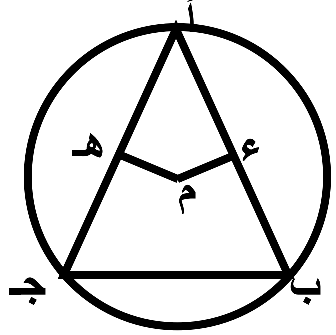
أ ب = جـ ء ، هـ منتصف أ ب

و منتصف جـ ء

إثبت أن م هـ = م و

****

(٢) فى الشكل المقابل



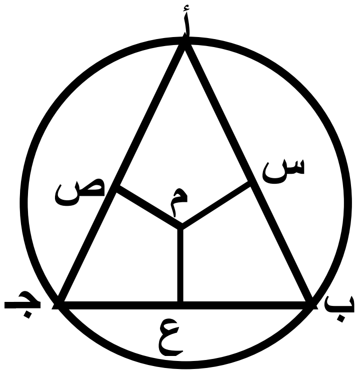
ق(أ ب جـ) = ق (أ جـ ب)

م ء ⊥ أ ب ،، م هـ ⊥ أ جـ

إثبت أن م ء = م هـ

****

(٣) فى الشكل المقابل



ق(أ) = ق(جـ) = ٦٠° ، س ، ص ، ع منتصفات

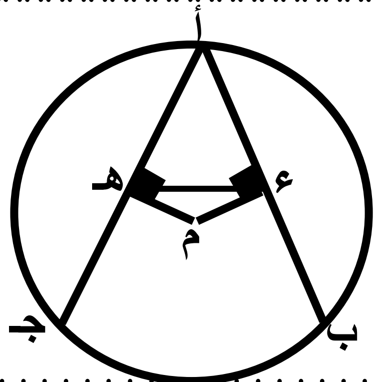
أ ب ، أ جـ ، ب جـ على الترتيب

إثبت أن

م س = م ص = م ع

****

(٤) فى الشكل المقابل



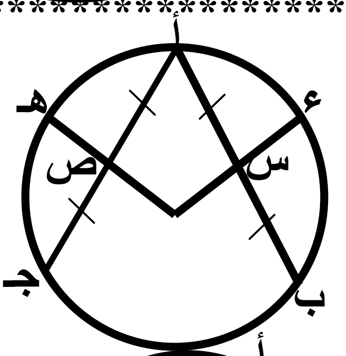
أ ب = أ جـ ، م ء ⊥ أ ب

م هـ أ جـ إثبت أن

ق(م ء هـ) = ق (م هـ ء)

****

(٥) فى الشكل المقابل

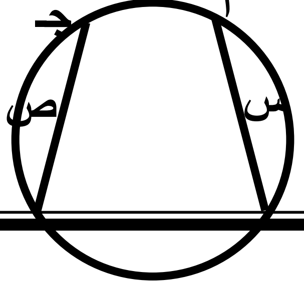


أ ب = أ جـ ، س منتصف أ ب

ص منتصف أ جـ

إثبت أن س ء = ص هـ

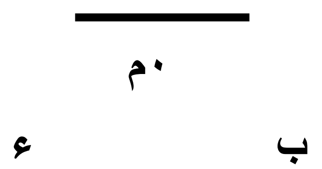
(٦) فى الشكل المقابل



أ ب = جـ ء ، س منتصف أ ب

ص منتصف جـ ء

إثبت أن ق (أ س ص) = ق(جـ ص س)



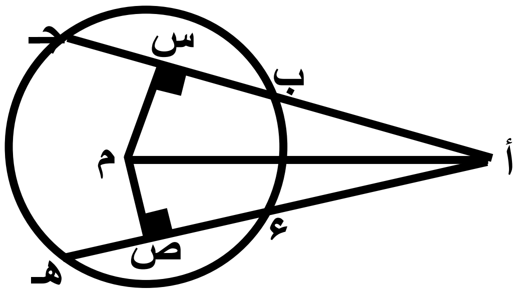
****

(٧) فى الشكل المقابل

ب جـ = ء هـ ، م س ⊥ ب جـ

م ص ⊥ ء هـ أثبت أن

أ ب = أ ء



****

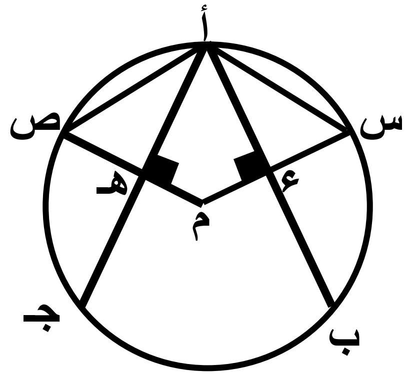
(٨) فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، م س ⊥ أ ب

م ص ⊥ أ جـ إثبت أن

(١) أ س = أ ص

(٢) ق (س أ جـ) = ق (ص أ ب)



****

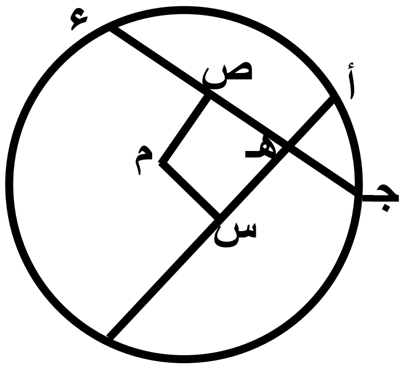
(٩) فى الشكل المقابل

أ ب = جـ ء ، س منتصف أ ب

ص منتصف جـ ء

أثبت أن

هـ س ص متساوى الساقين



****

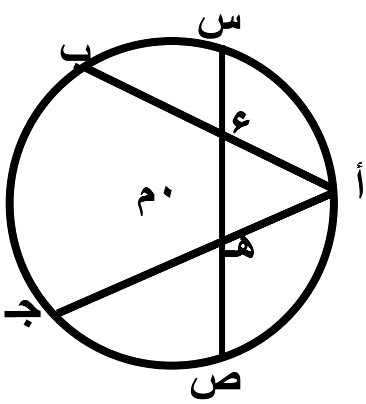
(١٠) فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، ء منتصف أ ب

هـ منتصف أ جـ إثبت أن

(أولا) س ص ⊥ أ م

(ثانيا) س ء = هـ ص

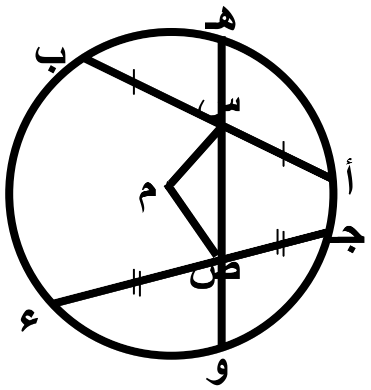


(١١) فى الشكل المقابل

أ ب = جـ ء ، س ، ص منتصفات أ ب

، جـ ء على الترتيب أثبت أن

هـ س = ص و



---

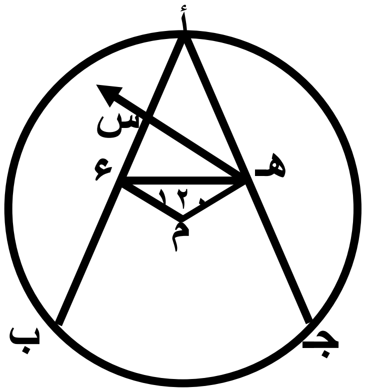
(١٢) فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، ء منتصف أ ب

هـ منتصف أ جـ ، ق(ء م هـ) = ١٢٠ ْ

$\overleftarrow{\text{هـ س}}$ ينصف (أ هـ ء)

إثبت أن $\overleftarrow{\text{هـ س}}$ // م ء



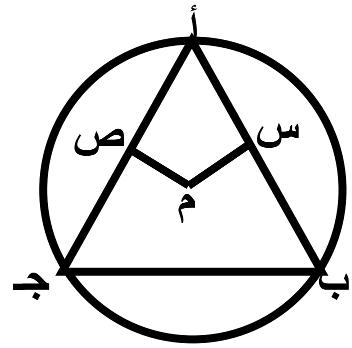
---

(١٣) فى الشكل المقابل

ق(أ) = ٥٠ ْ ، ق (ب) = ٦٥ ْ

م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

إثبت أن م س = م ص



---

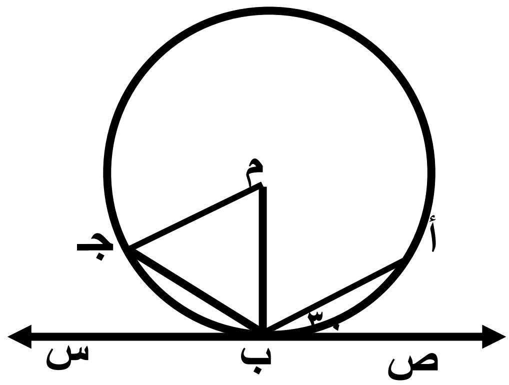
(١٤) فى الشكل المقابل

س ص مماس للدائرة عند ب ،

أ ب // م جـ ، ق(أ ب ص) = ٣٠ ْ

(١) أوجد ق(جـ م ب)

(٢) إثبت أن ب جـ = نق

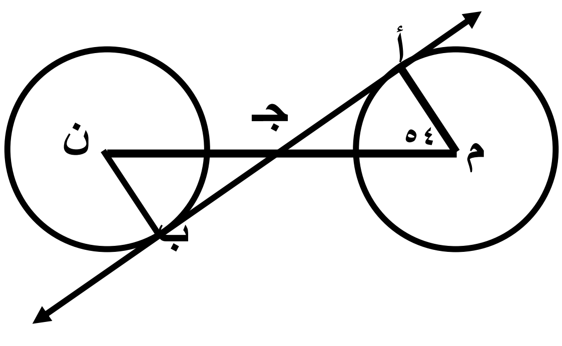


---

(١٥) فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان ، أ ب مماس للدائرتين

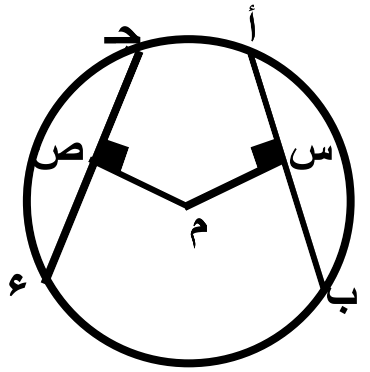
عند أ ، ب ، ق(أ م ن) = ٥٤ ْ أوجد



(١) ق(ب ن م) (٢) إثبت أن جـ منتصف م ن

عكس نظرية (٢ – ١)

فى الدائرة الواحدة أو فى الدوائر المتطابقة إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية فى الطول



فمثلا فى الشكل المقابل

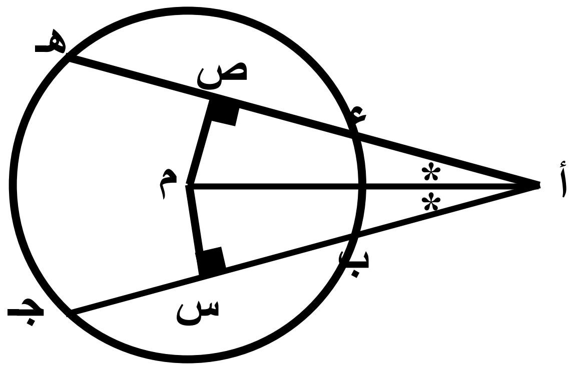
إذا كان م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ جـ ء

، م س = م ص

فإن أ ب = جـ ء

****

مثال فى الشكل المقابل



دائرة م فيها أ م ينصف (هـ أ جـ)

إثبت أن ب جـ = ء هـ

الحـــــــل

نرسم م س ⊥ ب جـ ، م ص ⊥ ء هـ

△ △ م أ س، م أ ص

فيهما { أ م ضلع مشترك
ق(س أ م) = ق(ص أ م)
ق(أ س م) = ق(أ ص م)

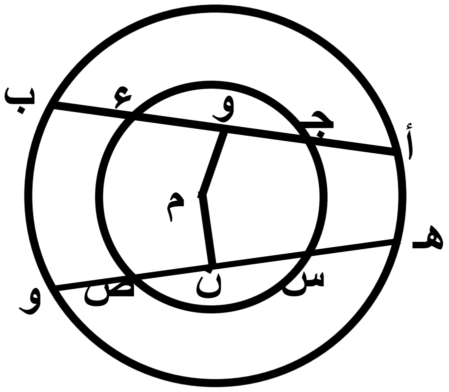
△ أ س م ≡ △ أ ص م

∴ م س = م ص

∴ ب جـ = ء هـ

****

مثال فى الشكل المقابل



دائرتان متحدتا المركز م ، أ ب وتر فى الكبرى

يقطع الصغرى فى جـ ، ء ، هـ و وتر فى الكبرى

يقطع الصغرى فى س ، ص فإذا كان أ ب = هـ و

إثبت أن جـ ء = س ص

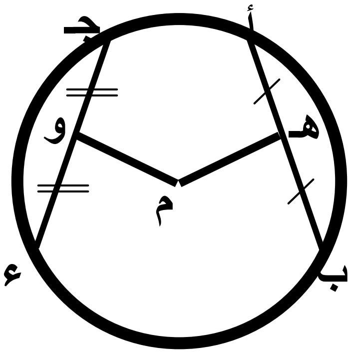
الحـــــــل

العمل :ـ نرسم م و أ ب ، م ن هـ و

فى الدائرة الكبرى أ ب = هـ و ∴ م و = م ن

فى الدائرة الصغرى م و = م ن ∴ جـ ء = س ص

مثال فى الشكل المقابل



أ ب ، جـ ء وتران فى الدائرة م حيث م=(٢ ، -٣)

فإذا كان هـ منتصف أ ب ، و منتصف جـ ء حيث

هـ = (-١ ، ١) ، و = (٦ ، ٠) إثبت أن أ ب = جـ ء

الحـــــــــل

م هـ = $\sqrt{(٢+١)^{٢} + (-٣-١)^{٢}}$ = $\sqrt{٩+١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طولية

م و = $\sqrt{(٢ - ٦)^{٢} + (-٣+٠)^{٢}}$ = $\sqrt{١٦+٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طولية

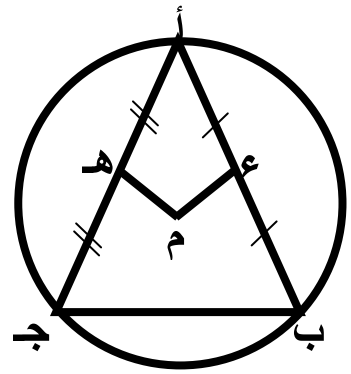
هـ منتصف أ ب ∴ م هـ ⊥ أ ب

و منتصف جـ ء ∴ م و ⊥ جـ ء

م هـ = م و ∴ أ ب = جـ ء

****

مثال فى الشكل المقابل



ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ

م ء = م هـ ، ق (ء م هـ) = ١٢٠°

إثبت أن △ أ ب جـ متساوى الاضلاع

الحـــــــــل

ء منتصف أ ب ∴ م ء ⊥ أ ب (١)

هـ منتصف أ جـ ∴ م هـ ⊥ أ جـ (٢)

م ء = م هـ (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

أ ب = أ جـ

∴ ق(ب) = ق (جـ)

ق(أ) = ٣٦٠ – [٩٠+٩٠+١٢٠]= ٦٠°

ق(ب) = ق(جـ) = $\frac{١٨٠ - ٦٠}{٢}$ = $\frac{١٢٠}{٢}$ = ٦٠°

∴ ق(أ) = ق(ب) = ق(جـ)

∴ △ أ ب جـ متساوى الاضلاع

****

ما الفخر إلا لاهل العلم إنهم على الهدى لمن أستهدى أدلاء

وقدر كل أمرء ما كان يحسنه والجاهلون لاهل العلم أعداء

ففز بعلم تعش حياً به أبداُ فالناس موتى وأهل العلم أحياء

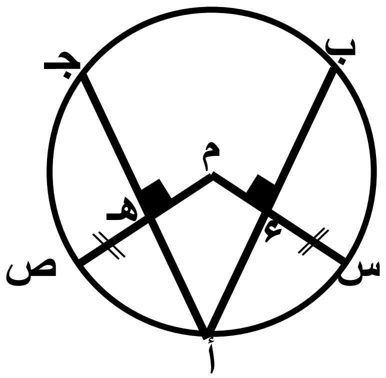
مثال

فى الشكل المقابل

م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

س ء = ص هـ إثبت أن

أ ب = أ جـ



الحـــــــــل

م س = م ص (أنصاف أقطار) (١)

س ء = ص هـ (معطى) (٢)

بطرح ٢ من ١

م س – س ء = م ص – ص هـ

م ء = م هـ (٤)

م ء ⊥ أ ب ، م هـ ⊥ أ جـ (٥)

من ٤ ، ٥ ينتج أن

أ ب = أ جـ

****

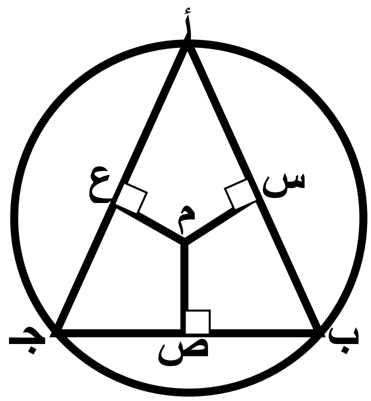
مثال

فى الشكل المقابل

إذا كان م س = م ص = م ع

أوجد ق(أ) وإذا كان أ ب = ١٠سم

أوجد محيط △ أ ب جـ



الحـــــــــل

م س ⊥ أ ب ، م ع ⊥ أ جـ ، م س = م ع

∴ أ ب = أ جـ (١)

م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ب جـ ، م س = م ص

∴ أ ب = ب جـ (٢)

م ص ⊥ ب جـ ، م ع ⊥أ جـ ، م ص = م ع

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

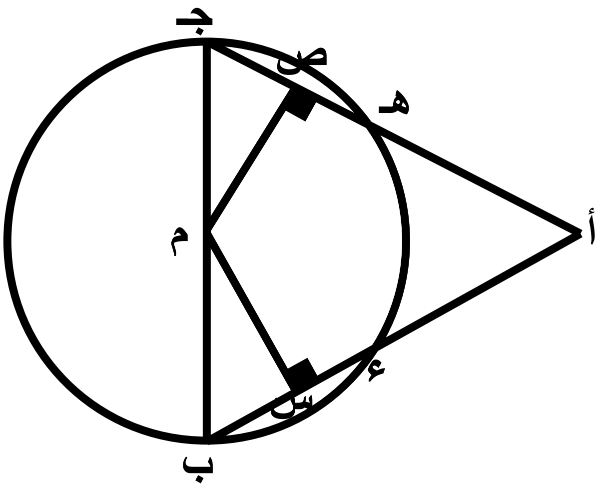
أ ب = ب جـ = أ جـ = ١٠سم

ق(أ) = ق(ب) = ق(جـ) = ٦٠°

محيط △أ ب جـ = أ ب + ب جـ + أ جـ

= ١٠ + ١٠+ ١٠ = ٣٠ سم

∴ ب جـ = أ جـ (٣)



مثال

فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث ، ب جـ قطر فى الدائرة م

رسم م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

فإذا كان ب ء = جـ هـ

إثبت أن أ ب = أ جـ

الحـــــــــل

م س ⊥ ء ب ، م ص ⊥ هـ جـ ، ء ب = هـ جـ

∴ م ص = م س

∆∆ أ ص م ، أ س م

فيهما { أ م ضلع مشترك
م ص = م س
ق(أ س م) = ق(أ ص م) = ٩٠° }

∆ أ س م ≡ ∆ أ ص م

∴ أ س = أ ص (١)

م س ⊥ ءب ∴ س منتصف ء ب

ب س = $\frac{١}{٢}$ ء ب

م ص ⊥ هـ جـ ∴ ص منتصف هـ جـ

ص جـ = $\frac{١}{٢}$ هـ جـ

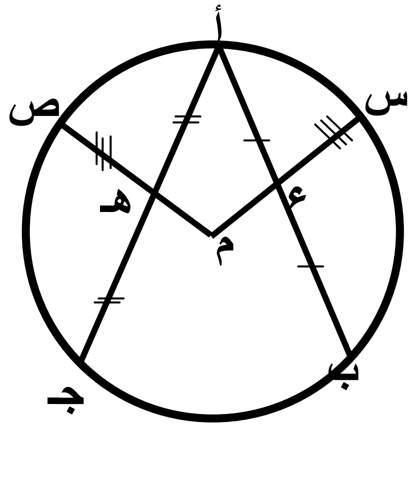
ب ء = هـ جـ ∴ ب س = ص جـ (٢)

بجمع ١ ، ٢

أ س + س ب = أ ص + ص جـ

∴ أ ب = أ جـ

****



مثال

فى الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ وتران فى الدائرة م

ء ، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ على الترتيب

م ء ، م هـ يقطعان الدائرة فى س ن ص

على الترتيب فإذا كان ءس = هـ ص

إثبت أن أ ب = أ جـ

الحـــــــــل

ء منتصف أ ب ∴ م ء ⊥ أ ب

∴ أ ب = أ جـ

هـ منتصف أ جـ ∴ م هـ ⊥ أ جـ

م س = م ص ، س ء = ص هـ

م س – س ء = م ص – ص هـ

∴ م ء = م هـ

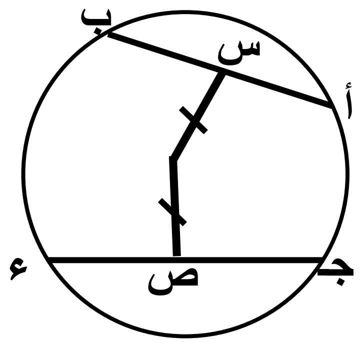
تمارين (٩) على علاقة أوتار الدائرة بمركزها

(١) أكمل ما يأتى

١- الاوتار المتساوية فى الطول فى دائرة على أبعاد ....

٢- فى الدائرة الواحدة إذا كانت الاوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون ....

٣- فى الشكل المقابل



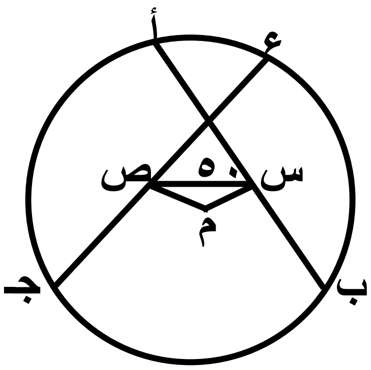
إذا كان أ ب ، جـ ء وترين فى الدائرة م

س ، ص منتصفى أ ب ، جـ ء على الترتيب

وكان م س = م ص ، أ ب = ٧سم

فإن جـ ص = ...

٤- فى الشكل المقابل



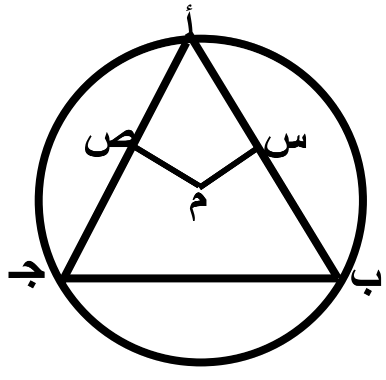
أ ب ، جـ ء وترين متساويان فى الطول فى الدائرة م

س ، ص منتصفا أ ب ، جـ ء على الترتيب

فإذا كان ق(أ س ص) = ٥٠ ˚

فإن ق(س م ص) = ...

٥- فى الشكل المقابل



أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة م

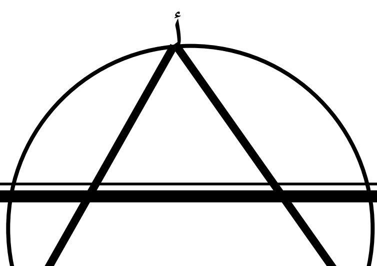
م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

، م س = م ص ،

ق(أ) = ٧٢ ˚ فإن ق(ب) = ...

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٢]فى الشكل المقابل

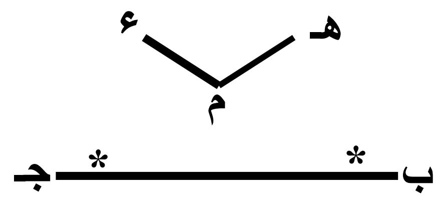


أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة م فيه

ق(ب) = ق (جـ)

ء منتصف أ جـ ، م هـ ⊥ أ ب

إثبت أن م ء = م هـ



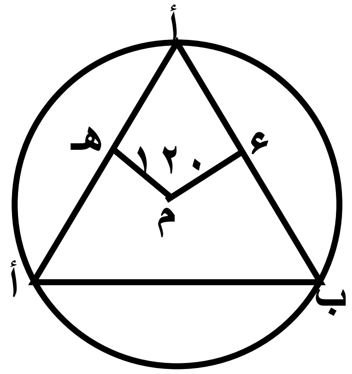
[٣] فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة م ، ء منتصف أ ب

هـ منتصف أ جـ ، م ء = م هـ

وكان ق(ء م هـ) = ١٢٠ °

إثبت أن المثلث أ ب جـ متساوى الاضلاع



@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

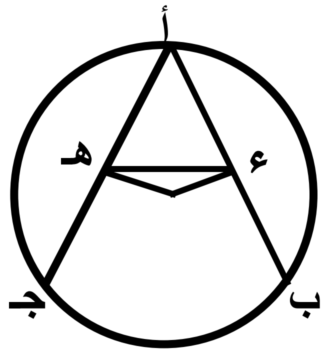
[٤] فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، ء ، هـ منتصف أ ب ، أ جـ على الترتيب

ق(م ء هـ) = ٣٠ ° إثبت أن

١ـ △م ء هـ متساوى الساقين

٢ـ △أ ء هـ متساوى الاضلاع



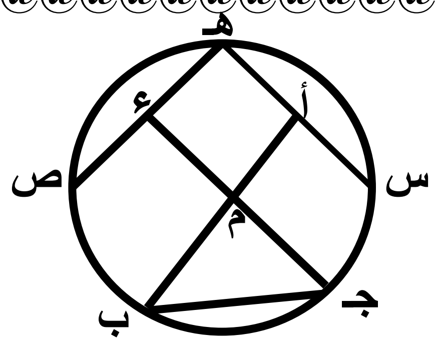
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٥] فى الشكل المقابل

دائرة م ، ب أ ⊥ س هـ ، جـ ء ⊥ ص هـ

أ ب ∩ جـ ء = { م } ، أ ب = جـ ء

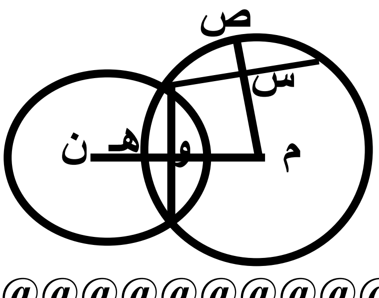
أ س = ٣سم أوجد طول هـ ص



@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

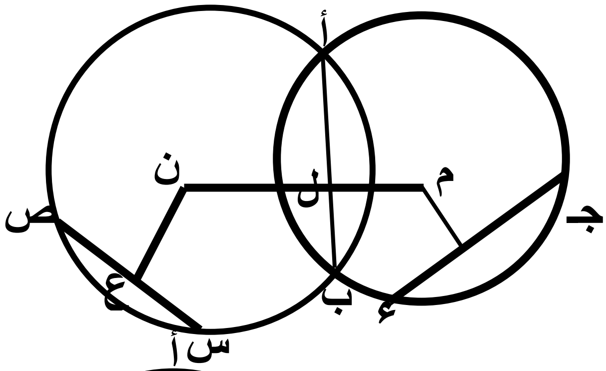
[٦] فى الشكل المقابل

دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب رسم م س ⊥ أ جـ
فقطعه فى س ويقطع الدائرة فى ص ، ورسم م ن
يقطع أ ب فى و ويقطع الدائرة فى هـ فإذا كان
س ص = و هـ إثبت أن أ جـ = أ ب



@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٧] فى الشكل المقابل



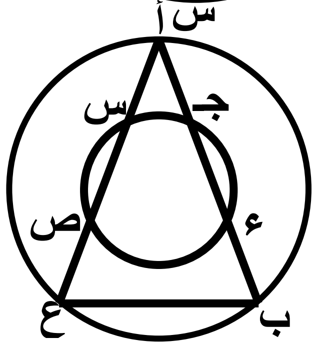
م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

م ن ∩ أ ب = { ل } ، و منتصف جـ ء

ع منتصف س ص ، م و = م ل ، ن ل = ن ع

إثبت أن جـ ء = س ص

[٨] فى الشكل المقابل



دائرتان متحدتا المركز م ، أ ب وتر فى الدائرة الكبرى

يقطع الدائرة الصغرى فى جـ ، ء ، أ ع وتر فى الدائرة

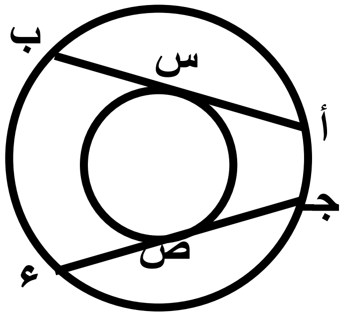
الكبرى يقطع الدائرة الصغرى فى س ، ص

فإذا كان ق(أ ب ع) = ق (ا ع ب)

إثبت أن جـ ء = س ص

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٩] فى الشكل المقابل



دائرتان متحدتا المركز م ، أ ب ، جـ ء وتران فى

الدائرة الكبرى ويمسان الدائرة الصغرى فى س ، ص

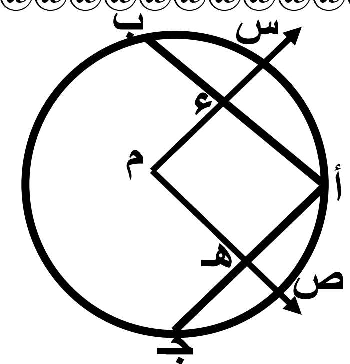
على الترتيب إثبت أن أ ب = جـ ء وإذا كان نصف قطر

الدائرة الكبرى = ٥سم وطول نصف قطر الدائرة الصغرى

٣سم أوجد طول أ ب

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[١٠] فى الشكل المقابل



دائرة مركزها م ، أ ب ، أ جـ وتران فيها

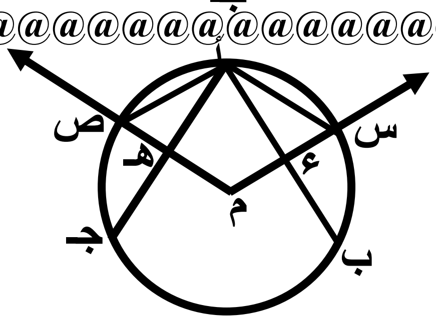
ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ

رسم م ء ، م هـ فقطعا الدائرة فى س ، ص على الترتيب

فإذا كان ءس = هـ ص إثبت أن أ ب = أ جـ

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[١١] فى الشكل المقابل



أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م
ء ، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ على الترتيب ، رسم م ء
فقطع الدائرة فى س ورسم م هـ فقطع الدائرة فى ص
إثبت أن (١) س ء = هـ ص
(٢) ق (س أ ب) = ق (ص أ جـ)

@@

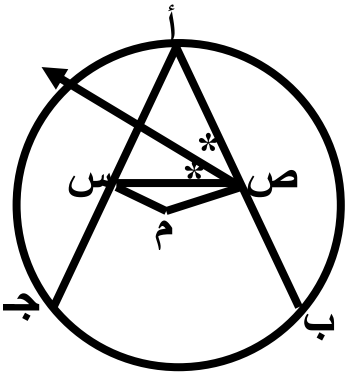
[١٢] فى الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م

س ، ص منتصفاهما على الترتيب إذا كان

ق(س م ص) = ١٢٠ ْ ، ص ع ينصف (أ ص س)

إثبت أن ص ع // م س



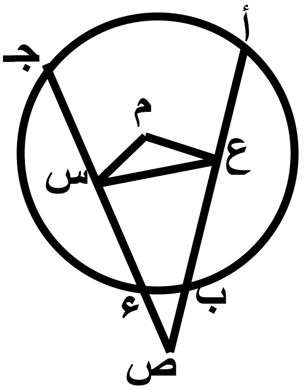
[١٣] فى الشكل المقابل

أ ب ، جـ ء وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م

أ ب ∩ جـ ء = { ص } ، ع منتصف أ ب

س منتصف جـ ء ، ق (ع م س) = ١٢٠ ْ

إثبت أن △ ع ص س متساوى الاضلاع



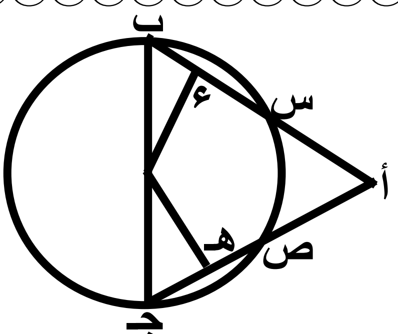
@@

[١٤] فى الشكل المقابل

ب جـ قطر فى الدائرة م ، ب س ، ـ ص وتران فيها

بحيث ب س ∩ جـ ص = { أ } ، ء منتصف س ب

، هـ منتصف ص جـ ، م ء = م هـ إثبت أن أ س = أ ص



@@

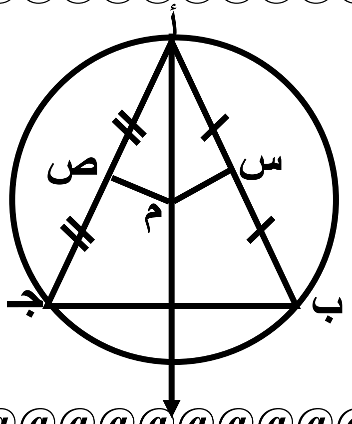
[١٥] فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة م ، ق(ب أ جـ) = ٦٠ ْ

س منتصف أ ب ، ص منتصف أ جـ ، م س = م ص

إثبت أن (١) △ أ ب جـ متساوى الاضلاع

(٢) أ م ⊥ ب جـ

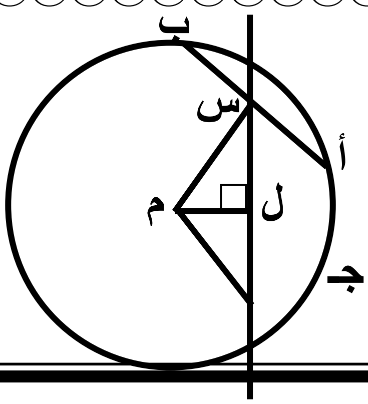


@@

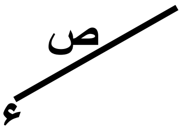
[١٦] فى الشكل المقابل

أ ب ، جـ ء وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م

س ، ص منتصفا أ ب ، جـ ء على الترتيب ، رسم



س ص فقطع الدائرة فى هـ ، و ،



رسم م ل ⊥ س ص برهن أن س هـ = ص و

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

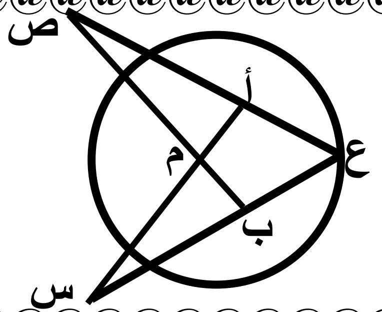
[١٧] أ م ينصف (س أ ص) رسمت الدائرة م تقطع أ س فى ب ، جـ وتقطع أ ص فى ء ، هـ

إثبت أن ب جـ = ء هـ

[١٨] أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول ى الدائرة م ، النقطتان س ، ص منتصفا أ ب ، جـ ء

بحيث ب ، ء فى جهة واحدة من س ص إثبت أن ق(ب س ص) = ق (ء ص س)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@



[١٩] فى الشكل المقابل

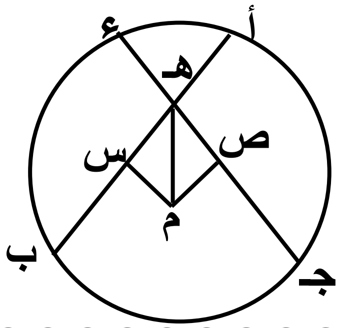
ع جـ ، ع ء وتران فى الدائرة م ، أ ∈ ع جـ

بحيث أ م ⊥ ع جـ ، أ م ∩ ع ء = { س }

ب ∈ ع ء بحيث ب م   ع ء ، ب م ∩ ع جـ = {ص}

فإذا كان م أ = م ب إثبت أن جـ ص = ء س

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@



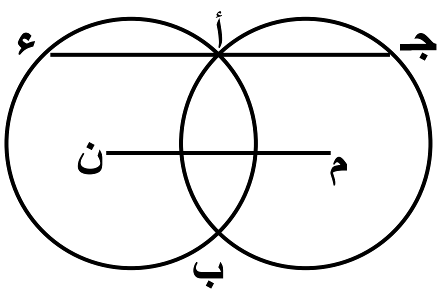
[٢٠] فى الشكل المقابل

أ ب ، جـ ء وتران فى الدائرة م يتقاطعان فى هـ

م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ جـ ء

ق(أ هـ م) = ق (ء هـ م) إثبت أن أ ب = جـ ء

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@



[٢١] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان ومتقاطعتان فى أ ، ب

حـ ء // م ن ، أ ∈ جـ ء

إثبت أن جـ أ = أ ء

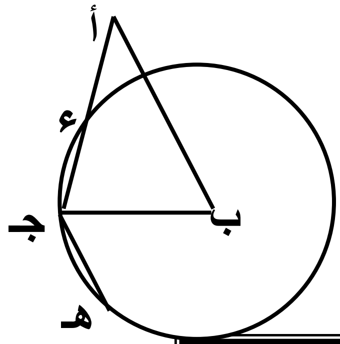
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٢٢] إذا كانت الدائرتان م ، ن متطابقتين ومتماستان من الخارج فى أ ورسم س ص يمر بنقطة أ ويقطع الدائرة م فى س ويقطع الدائرة ن فى ص

إثبت أن أ س ، أ ص على أبعاد متساوية من مركزيهما

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٢٣]فى الشكل المقابل



أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ رسمت دائرة مركزها ب

ونصف قطرها ب جـ قطعت أ جـ فى ء

رسمت جـ هـ // أ ب إثبت أن جـ ء = جـ هـ

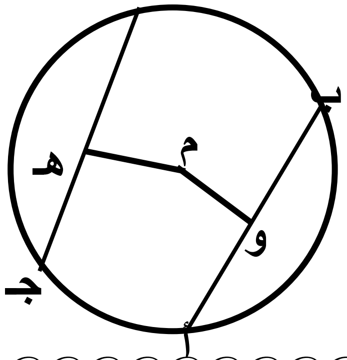
مسائل تربط الوحدة الاولى بالثانية

[٢٤] إذا كان أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م وكان م (٢ ، ١) ، أ (٤ ، ٣)

ب= (٠ ، ٣) فأوجد بعد الوتر أ جـ عن مركز الدائرة م

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

[٢٥] فى الشكل المقابل



أ ب ، جـ ء وتران فى الدائرة م

و ، هـ منتصفا أ ب ، جـ ء على الترتيب فإذا كانت

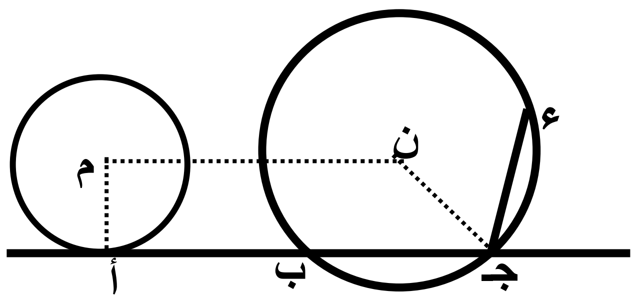
أ(٠ ، -٣) ، ب (٤ ، -١) ، هـ (-١ ، ١)

، م (١ ، ٠) إثبت أن أ ب = جـ ء

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

للمتفوقين

[٢٦] فى الشكل المقابل



م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ٤سم ، ٥سم

أ جـ يمس الدائرة م عند أ ويقطع الدائرة ن فى

ب ، جـ حيث ب جـ = ٦سم ، م ن = ١٢سم

(١) إثبت أن الشكل م أ جـ ن شبه منحرف ثم أحسب مساحته

(٢) إذا كان جـ ء = جـ ب أوجد بعد النقطة ن عن جـ ء

@@

[٢٧]أ ب وتر فى الدائرة م ، جـ منتصف أ ب ، هـ ، س تنتميان للدائرة م بحيث جـ أ ينصف (هـ جـ س) ، رسم هـ جـ يقطع الدائرة فى ء ، رسم س جـ يقطع الدائرة فى ص إثبت أن هـ ء = س ص

الوحدة الثالثة

حساب المثلثات

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

القياس الستينى للزاوية :-

القياس الستينى نوع من أنواع القياس وحداته الدرجة والدقيقة والثانية

١ ° = ٦٠ /   (الدرجة = ٦٠ دقيقة)   ١ / = ٦٠ //   (الدقيقة = ٦٠ ثانية)

وقد تتكون الزاوية من درجات فقط أو درجات ودقائق أو درجات ودقائق وثوانى فمثلا

ق(أ) = ١٠٠ °   أو ق (ب) = ٤٠ / ١٥٠ °   أو ق (جـ) = ١٥ // ٣٥ / ٧٠ °

ويمكن تحويل الدقائق والثوانى إلى درجات بأحدى طريقتين

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

مثال **أكتب كلا من الزوايا التالية بالدرجات**

(أ) ٢٥ / ١٠٠ °   (ب) ١٥ // ٣٠ / ١٢٠ °

الحـــــــــل

(أ)

الطريقة الأولى

٢٥ / ١٠٠ ° = ١٠٠ + $\frac{٢٥}{٦٠}$ = ١٠٠ + ٠.٤١٦٦٦٦٦٧ = ١٠٠.٤١٦٦٦٦٦٧

الطريقة الثانية (بالالة الحاسبة)

100	,,,,	40	,,,,	=	100.41666667

(ب) ١٥″ ٣٠′ ١٢٠°

الطريقة الاولى

١٥″ ٣٠′ ١٢٠° = ١٢٠° + $\frac{٣٠}{٦٠}$ + $\frac{١٥}{٦٠ \times ٦٠}$ = ١٢٠° + ٠.٥ + ٠.٠٠٤١٦٦٦٧

= ١٢٠.٥٠٤١٦٦٧°

الطريقة الثانية (بالالة الحاسبة)

120	,,,,	30	,,,,	30	,,,,	=	120.50416667

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

مثال أكتب كلا من الزوايا الأتية بالدرجات والدقائق والثوانى

(أ) ٥٤.٣٦ (ب) ١٠٠.٥

الحـــــــــل

بأستخدام الالة الحاسبة

54.36	=	shif	,,,,	=	54° 21° 36°

٥٤.٣٦ = ٣٦″ ٢١′ ٥٤°

(ب) ١٠٠.٥

بأستخدام الحاسبة

100.5	=	shif	,,,,	=	100° 30°

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

النسب المثلثية للزاوية الحادة

أى زاوية حادة تقع فى مثلث قائم الزاوية يمكن إيجاد جميع النسب المثلثية لها بمعلومية أضلاع المثلث القائم الزاوية

توجد ثلاث نسب مثلثية لاى زاوية حادة وهى

(١) جيب الزاوية ويرمز له بالرمز (جا) وبالانجليزية بالرمز (Sin)

(٢) جيب تمام الزاوية ويرمز له بالرمز (جتا) وبالانجليزية بالرمز (Sin)

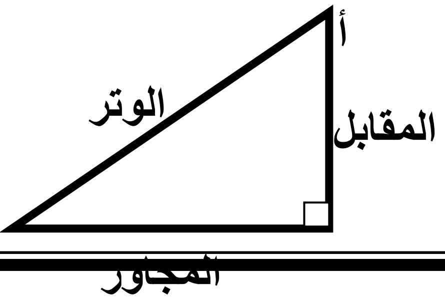
(٣) ظل الزاوية ويرمز له بالرمز (ظا) وبالانجليزية بالرمز (tan)

جاجـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتـر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

جا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتـر}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$

$\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتـر}}$ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$

$\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتـر}}$ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$



جتاجـ = = جتا أ = =

* جـ ب

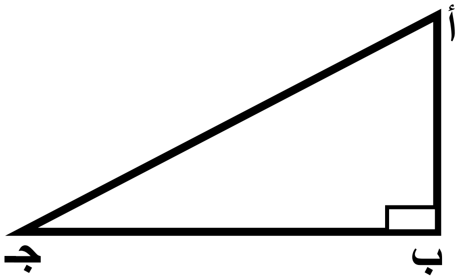
ظاجـ = $\frac{\text{المقـــابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$ ظا أ = $\frac{\text{المقـــابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

****

لاحظ أن

بالنسبة لزاوية أ يتغير وضع المقابل والمجاور فيكون المقابل (ب جـ) والمجاور (أ ب)

****

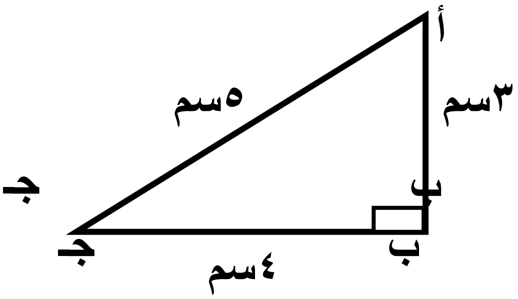


لاحظ أن :- (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

(أ ب)^{٢} = (أ جـ)^{٢} – (ب جـ)^{٢}

(ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} – (أ ب)^{٢}

مثال من المثلث القائم الزاوية المقابل أكمل



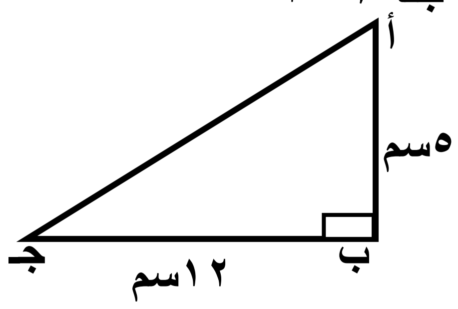
(١) جا جـ = ... (٣) جا أ = ...

(٣) جتاجـ = ... (٦) جتا أ = ...

(٧) ظا جـ = ... (١٠) ظا أ = ...

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

مثال أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب حيث أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ١٢ سم أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية أ ثم أثبت أن جا^{٢} أ + جتا^{٢} أ = ١



الحـــــــــــــــــل

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

= (٥)^{٢} + (١٢)^{٢} = ٢٥+١٤٤ = ١٦٩

أ جـ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣ سم

جا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتــر}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ = $\frac{١٢}{١٣}$

جتا أ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتــر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ = $\frac{٥}{١٣}$

جا^{٢} أ + جتا^{٢} أ = $\left(\frac{١٢}{١٣}\right)^{٢}$ + $\left(\frac{٥}{١٣}\right)^{٢}$

$\frac{١٤٤}{١٦٩}$ $\frac{٢٥}{١٦٩}$ $\frac{١٦٩}{١٦٩}$

= ــــــ + ــــــ = ــــــ = ــــــ = ١

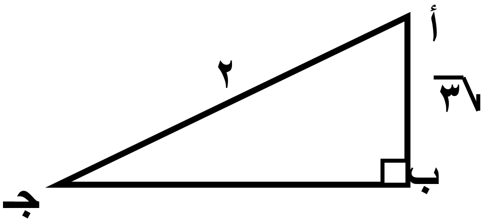
ظا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$ = $\frac{١٢}{٥}$

@@

مثال

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فإذا كان ٢ أ ب = $\sqrt{٣}$ أ جـ فأوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية جـ

الحـــــــــــــل



٢ أ ب = $\sqrt{٣}$ أ جـ

$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(ب جـ)^٢ = (٢)^٢ – ($\sqrt{٣}$)^٢ = ٤ – ٣ = ١

ب جـ = ١

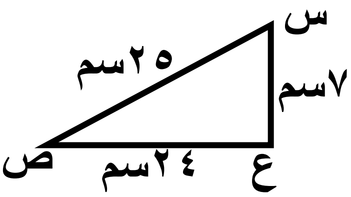
جا جـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جتاجـ = $\frac{١}{٢}$ ظا جـ = $\frac{\sqrt{٣}}{١}$ = $\sqrt{٣}$

مثال

س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ع ، س ع = ٧ سم ، س ص = ٢٥ سم أوجد قيمة كلا من

(١) ظاس × ظاص   (٢) جا^٢ س + جا^٢ ص

الحـــــــــــــل



(ع ص)^٢ = (س ص)^٢ – (س ع)^٢ = (٢٥)^٢ – (٧)^٢

= ٦٢٥ – ٤٩ = ٥٧٦

ع ص = $\sqrt{٥٧٦}$ = ٢٤ سم

ظاس × ظاص = $\frac{٢٤}{٧} \times \frac{٧}{٢٤}$ = ١

جا^٢ س + جا^٢ ص = $(\frac{٢٤}{٢٥})^٢ + (\frac{٧}{٢٥})^٢ = \frac{٥٧٦}{٦٢٥} + \frac{٤٩}{٦٢٥} = \frac{٥٧٦ + ٤٩}{٦٢٥} = \frac{٦٢٥}{٦٢٥} = ١$

@@

مثال

أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ جـ = ٥ سم ، ب جـ = ٨ سم

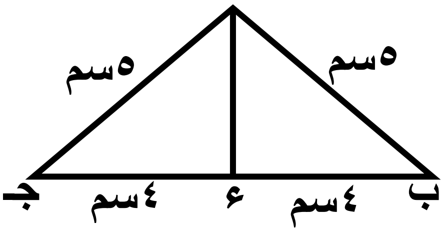
أوجد جميع الدوال المثلثية الأساسية لزاوية جـ

الحـــــــــــل

أ

نرسم أ ء عمودى على ب جـ فينصف ب جـ

ثم نوجد أ ء



$(أ ء)^2 = (أ ب)^2 - (ب ء)^2 = ٢٥ - ١٦ = ٩$

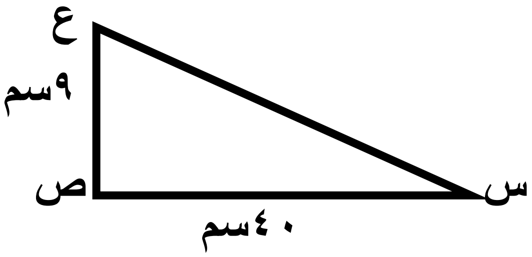
$\therefore$ أ ء = ٣ سم

جاب = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٣}{٥}$ جتاب = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٤}{٥}$ ظاجـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٣}{٤}$

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

تدريب

(١) فى الشكل المقابل أكمل



أ) جاس = ...

ب) جتاس = ...

جـ) ظاس = ...

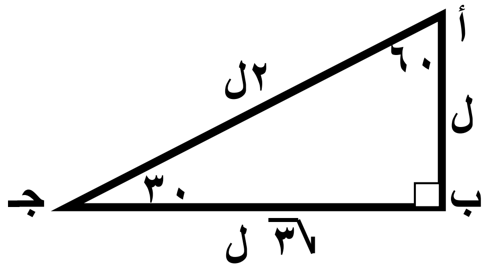
ء) جاع = ... ، جتاع = ... ، ظاع = ...

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

هناك بعض الزوايا يمكن إيجاد الدوال المثلثية لها بدون أستخدام الالة الحاسبة ولهذا تسمى هذه الزوايا بالزوايا الخاصة

لايجاد الدوال المثلثية للزاويتين ٣٠° ، ٦٠° نقوم برسم مثلث ثلاثينى ستينى

من المعروف أن الضلع المقابل للزاوية ٣٠ يساوى نصف طول الوتر وإذا فرض أن أب = ل فإن أ جـ = ٢ ل



وإذا قمنا بإيجاد ب جـ

$(ب جـ)^2 = (أ جـ)^2 - (أ ب)^2 = (٢ ل)^2 - (ل)^2$

$= ٤ ل^2 - ل^2 = ٣ ل^2$ فيكون ب جـ = $\sqrt{٣}$ ل

جا٣٠ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{ل}{٢ل} = \frac{١}{٢}$ جا٦٠ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{٣} ل}{٢ل} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

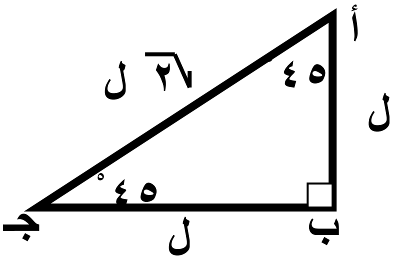
$\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ $\frac{\sqrt{٣} ل}{٢ل}$ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ $\frac{ل}{٢ل}$ $\frac{١}{٢}$

جتا٣٠= = = جتا٦٠ = = ___ =

ظا٣٠ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ل}}{\sqrt{٣}\,\text{ل}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ظا٦٠ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\sqrt{٣}\,\text{ل}}{\text{ل}} = \sqrt{٣}$

@@@

لايجاد الدوال المثلثية للزاوية ٤٥° نفرض وجود مثلث قائم الزاوية أحدى زواياه ٤٥° فتكون الزاوية الثالثة ٤٥° أيضا أى أن المثلث سيكون مثلث متساوى الساقين نفرض أن ساقيه طوليهما ل ، ل نوجد الضلع الثالث وهو الوتر



$(\text{أ جـ})^{٢} = (\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢} = \text{ل}^{٢} + \text{ل}^{٢} = ٢\,\text{ل}^{٢}$

أ جـ = $\sqrt{٢}$ ل

وبالتالى تكون الدوال المثلثية للزاوية ٤٥° تكون كالتالى

جا٤٥ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ل}}{\sqrt{٢}\,\text{ل}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

جتا٤٥ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ل}}{\sqrt{٢}\,\text{ل}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

ظا٤٥ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ل}}{\text{ل}} = ١$

مثال بدون أستخدام الحاسبة أوجد قيمة كلا من المقادير الاتية

(١) جا٦٠ جتا٣٠ + جتا٦٠ جا٣٠

الحـــــــــــل

المقدار = $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{٤}{٤} = ١$

****

(٢) جا^{٢} ٤٥ + ظا٤٥ - جتا٦٠

الحـــــــــــل

المقدار = $(\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢}$ + ١ − $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ + ١ - $\frac{١}{٢}$ = ١

****

(٣) جا^{٢} ٦٠ + ظا^{٢} ٦٠ + جا ٤٥ جتا٤٥

الحـــــــــــــل

المقدار $= \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} + (\sqrt{٣})^{٢} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٣}{٤} + ٣ + \frac{١}{٢} = \frac{٣ + ١٢ + ٢}{٤} = \frac{١٧}{٤}$

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٤) جتا٦٠ جا٣٠ – جا٦٠ ظا٦٠ + جتا^{٢} ٣٠

الحـــــــــــــل

المقدار $= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \sqrt{٣} + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٤}$

$= ١ - \frac{٣}{٢} = \frac{-١}{٢}$

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

ملاحظات

(١) جيب الزاوية يساوى جيب تمام الزاوية المتتمة لها (فمثلا جا٣٠ = جتا٦٠ = $\frac{١}{٢}$)

(٢) ظا أ $= \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$ (لاى زاوية)

بدون أستخدام الحاسبة إثبت أن

(١) ظا٤٥ = ٢ جا٤٥ جتا٤٥

الحـــــــــــل

الايمن = ١

الايسر $= ٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٢ \times \frac{١}{٢} = ١$

∴ الطرفان متساويان

(٢) جتا٦٠ = ٢ جتا^{٢} ٣٠ – ١

(٤) جا^{٣} ٣٠ = ٩ جتا^{٣} ٦٠ – ظا^{٢} ٤٥

الحـــــــــــل

الايمن $= \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} = \frac{١}{٨}$

الايسر $= ٩ \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} - (١)^{٢} = ٩ \times \frac{١}{٢} - ١$

$= \frac{٩}{٨} - ١ = \frac{١}{٨}$

الحـــــــل

الايمن = $\frac{١}{٢}$

الايسر = ٢ $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$ – ١ = ٢ × $\frac{٣}{٤}$ - ١

= $\frac{٣}{٢}$ - ١ = $\frac{١}{٢}$

(٣) جتا٦٠ = ١ – ٢ جا^{٢} ٣٠

الحـــــــــــــل

الايمن= $\frac{١}{٢}$

الايسر = ١ – ٢ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ = ١ – ٢ × $\frac{١}{٤}$

= ١ - $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ الطرفان متساويان

(٥) جتا٦٠ جتا٣٠ – جا٦٠ جا٣٠ = صفر

الحـــــــــــــل

الايمن = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$

= $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ - $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ = صفر

∴ الطرفان متساويان

كيف يحزن من عنده رب يقدر ويغفر ويستر ويرزق ويرى ويسمع وبيده مقاليد الأمور

مثال بدون إستخدام الحاسبة أوجد قيمة س حيث ٠ ْ < س < ٩٠ التى تحقق أن

(١) ظاس = ٢ جا٤٥ جتا٤٥

الحـــــــل

ظاس = ٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ظاس = ٢ × $\frac{١}{٢}$

ظاس = ١

(٤) ظاس = ٤ جا٣٠ جا٦٠

الحـــــــل

ظاس = ٤ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظاس = ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$

ظاس = $\sqrt{٣}$

س = ٤٥°

س = ٦٠°

(٢) ٣ظاس = ٢ جا٦٠

الحـــــــــل

$$٣ظاس = ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

$$٣ظــــاس = \sqrt{٣}$$

$$ظاس = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$$

بالضرب بسطاً ومقاماً فى $\sqrt{٣}$

$$ظاس = \frac{\sqrt{٣}}{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$$

$$ظاس = \frac{٣}{٣\sqrt{٣}}$$

$$ظاس = \frac{١}{\sqrt{٣}}$$

س = ٣٠°

(٥) جتاس = جا٣٠ ظا٦٠

الحـــــــــل

$$جتاس = \frac{١}{٢} \times \sqrt{٣}$$

$$جتاس = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

س = ٣٠°

لا تقل كثرت رايات الباطل وقم وأرفع للحق راية

تلخيص الدوال المثلثية للزوايا ٣٠ ، ٦٠° ، ٤٥°

	٣٠	٦٠	٤٥
جا	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
جتا	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
ظا	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$	١

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

إيجاد الدوال المثلثية الاساسية لزاوية بأستخدام الالة الحاسبة :-

مثال أوجد قيمة كلا من

(١) جا ٥٠　　　　(٢) جتا ١٢٠　　　　(٣) ظا ٢٠٠

الحـــــــــل

(١) بأستخدام الالة الحاسبة

sin → 50 → = → **0.766044443**

جا٥٠ = ٠.٧٦٦٠٤٤٤٤٣

@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٢) بأستخدام الالة الحاسبة

cos → 120 → = → **- 0.5**

جتا١٢٠ = - ٠.٥

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٣) بأستخدام الالة الحاسبة

tan → 200 → = → **0.363970234**

ظا٢٠٠ = ٠.٣٦٣٩٧٠٢٣٤

إيجاد زاوية إذا علمت أحدى الدوال المثلثية لها :-

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

مثال :- أوجد قيمة س التى تحقق أن

(١) جا س = ٠.٤٥

(٣) جتاس = ٠.١٢٥

(٥) ظاس = ٠.٦١٢٤

الحـــــــــــــل

(١) لايجاد الزاوية التى جيببها = ٠.٤٥ بأستخدام الالة الحاسبة

shift	sin	0.45	=	26° 44′ 37″

س = ٣٧″ ٤٤′ ٢٦°

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٢) لايجاد الزاوية التى جيبب تمامها =٠.١٢٥ بأستخدام الالة الحاسبة

shift	cos	0.125	=	82° 49′ 9″

س = ٩″ ٤٩′ ٨٢°

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

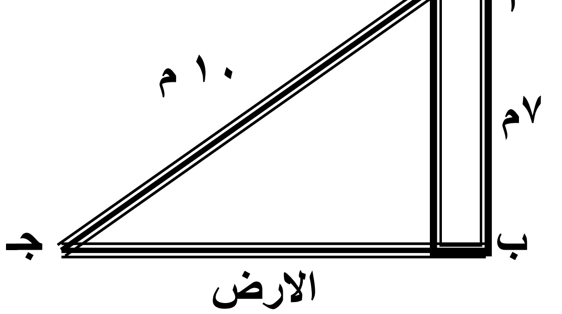
(١) لايجاد الزاوية التى ظلها = ٠.٦١٢٤ بأستخدام الالة الحاسبة

shift	tan	0.6124	=	31° 28′ 59″

س = ٥٩″ ٢٨′ ٣١°

مثال **سلم طوله ١٠ م يستند بطرفه العلوى على حائط رأسى أرتفاعه ٧ م وبطرفه السفلى على أرض أفقية أوجد قياس الزاوية التى يصنعها السلم مع الارض**

الحـــــــل

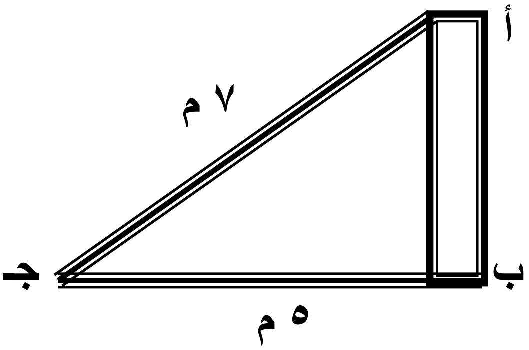


جاجـ = $\frac{٧}{١٠}$

ق (جـ) = ٣٧″ ٢٥′ ٤٤°

مثال سلم طوله ٧ م يستند بطرفه العلوى على حائط رأسى وبطرفه السفلى على أرض أفقية فإذا كان الطرف السفلى يبعد عن الحائط ٥ أمتار أوجد قياس الزاوية التى يصنعها السلم مع الارض

الحـــــــــل

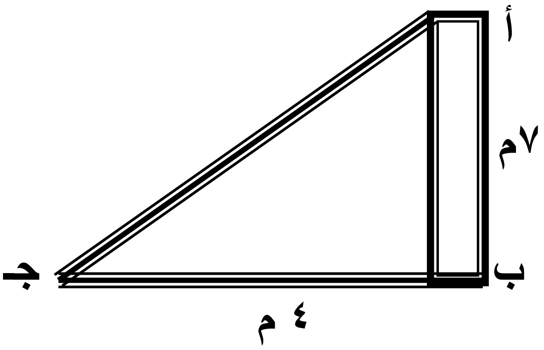


جتاجـ = $\frac{٥}{٧}$

ق (جـ) = ٥٥ ″ ٢٤ ′ ٤٤ °

مثال سلم يستند بطرفه العلوى على حائط رأسى أرتفاعه ٧ م وبطرفه السفلى على أرض أفقية فإذا كان الطرف السفلى يبعد عن الارض ٤ م أوجد قياس الزاوية التى يصنعها السلم مع الارض

الحـــــــــل



ظاجـ = $\frac{٧}{٤}$

ق (جـ) = ١٨ ″ ١٥ ′ ٦٠ °

مثال سلم طوله ١٠ م يستند بطرفه العلوى على حائط رأسى وبطرفه السفلى على أرض أفقية فإذا كان السلم يصنع مع الارض زاوية قياسها ٥٠ ° أوجد أرتفاع الحائط

الحـــــــــل

جا٥٠ = $\frac{\text{أ ب}}{١٠}$

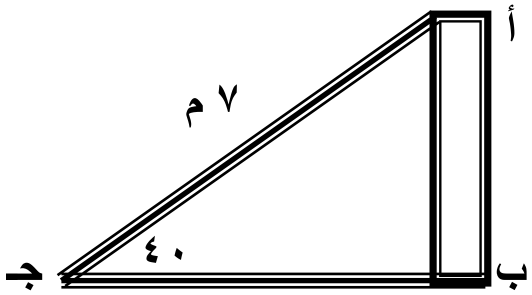
أ ب = ١٠ جا٥٠ = ٧.٦٦ م

الارض

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

مثال سلم طوله ٧ م يستند بطرفه العلوى على حائط رأسى وبطرفه السفلى على أرض أفقية فإذا كان السلم يصنع مع الافقى زاوية قياسها ٤٠ ° أوجد بُعد الطرف السفلى عن الحائط

الحـــــــــل



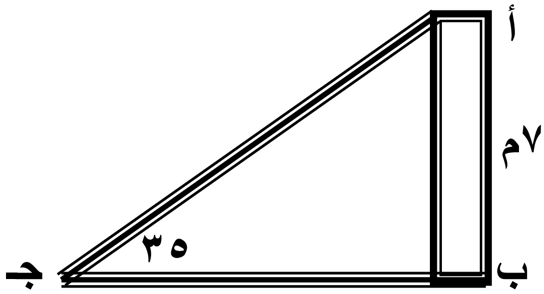
$\text{جتا}٤٠ = \frac{\text{ب جـ}}{٧}$

ب جـ = ٧ جتا٤٠ = ٥.٣٦ م

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

مثال سلم يستند بطرفه العلوى على حائط رأسى أرتفاعه ٧ م وبطرفه السفلى على أرض أفقية فإذا كان السلم يصنع مع الافقى زاوية قياسها ٣٥ ° أوجد طول السلم

الحـــــــــل

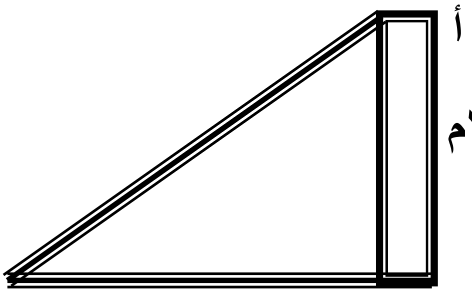


$\text{جا}٣٥ = \frac{٧}{\text{أ جـ}}$

جا ٣٥ × أ جـ = ٧

$\text{أ جـ} = \frac{٧}{\text{جا}٣٥} = ١٢.٢$ م

مثال سلم يستند بطرفه العلوى على حائط رأسى وبطرفه السفلى على أرض أفقية فإذا كان السلم يصنع مع الافقى زاوية قياسها ٣٥ ° أوجد طول السلم إذا علم أن الطرف السفلى يبعد عن الحائط مسافة ٦ م



الحـــــــــل

$\frac{\text{أ ب}}{٦}$

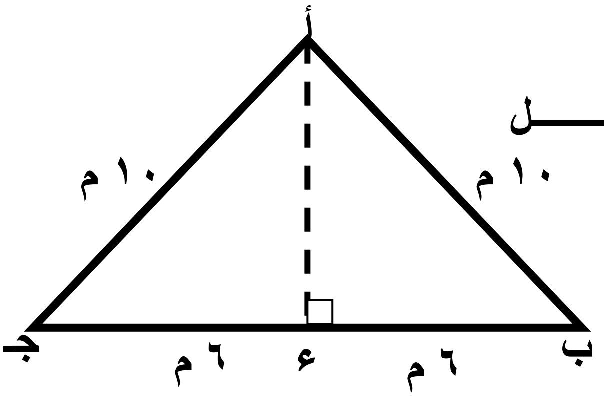
ظا٣٥ =

أ ب = ٦ ظا ٣٥   ب   ٣٥ جـ

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

مثال **أ ب جـ مثلث متساوى الساقين طولا ساقيه ١٠ سم وقاعدته = ١٢ سم**

أوجد قياس جميع زواياه



الحـــــــــل

فى أ ب ء

(أ ء)^{٢} = (أ ب)^{٢} – (ب ء)^{٢}

= ١٠٠ – ٣٦ = ٦٤

∴ أ ء = ٨ سم

جتاب = $\frac{٦}{١٠}$ ق (جـ) = ٧ $'$ ٥٣ $^{\circ}$

∴ ق (ب) = ٧ $'$ ٥٣ $^{\circ}$

∴ ق (أ) = ١٨٠ $^{\circ}$ – [٧ $'$ ٥٣ $^{\circ}$ + ٧ $'$ ٥٣ $^{\circ}$] = ١٨٠ $^{\circ}$ - ١٤ $'$ ١٠٦ $^{\circ}$

= ٤٦ $'$ ٧٣ $^{\circ}$

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

مثال **إذا كان ظا ٣ س = ١   أوجد قيمة س حيث ٠ < س < ٩٠**

الحـــــــــل

ظا٣س = ١	٣ س = ٤٥ $^{\circ}$
ظا٣س = ظا٤٥	س = ١٥ $^{\circ}$